Министерство образования и науки РБ

ГБПОУ "Бурятский аграрный колледж им. М.Н. Ербанова"

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2019

РАССМОТРЕНО	УТВЕРЖДЕНО МС
на заседании ЦК ЕНД	Зам.директора по НМР
Председатель ______Н.Б. Лумбунова	__________________С.О.Очирова
Протокол №2 от «8»__10____2019г.	Протокол №3 от «21»__11____2019г.

Методические указания предназначены для выполнения практических работ по математике студентами 1 курса. Данное пособие является руководством к решению задач по всем разделам программы по математике на базе основного общего образования. Основное назначение данных указаний – помочь студентам самостоятельно изучить приемы решения задач по математике, закрепить и углубить навыки, приобретенные при решении этих задач.

Автор: Биликтуева Светлана Сампиловна – преподаватель математики ГБПОУ "Бурятский аграрный колледж им. М.Н. Ербанова"

Рецензенты: Домиева Н.Ф. преподаватель математики ГБПОУ «Бурятский лесопромышленный колледж»
Баргуев С.Б.к.ф.-м.н., зав.каф. высшей математики и общепроф.дисциплин БИИК СибГУТИ

Содержание

1. Введение.

Решение задач по математике у студентов средних специальных учебных заведений часто сопряжено со многими трудностями. Помочь преодолеть эти трудности, научить применять теоретические знания к решению задач по всем разделам курса математики - основное назначение данного пособия.

В каждой работе приведены краткие теоретические сведения, описаны приемы решения типовых задач, дана их классификация и образцы записи решений, а затем следуют задания для самостоятельного решения. Подобная форма изложения позволяет студентам сначала познакомиться с приемами решения типовых задач. А затем приступить к выработке навыков в их самостоятельном решении.

В пособии рассматриваются задания по следующим разделам:

«Действительные числа», «Показательная и логарифмическая функция», «Тригонометрические функции», «Дифференциальное исчисление», «Интегральное исчисление»,«Векторы и координаты»,«Прямые и плоскости в пространстве,«Геометрические тела и поверхности»,«Объемы геометрических тел».

В результате изучения курса студент должен иметь представление о роли и месте математики в современном мире, общности ее понятий и представлений; о роли математики при изучении общепрофессиональных и специальных дисциплин и в профессиональной деятельности, об истории возникновения, развития и становления математики как основополагающей дисциплины, необходимой для изучения профессиональных дисциплин

Общие требования.

2.1. Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических работ

Студенты должны:

знать:

- способы решений линейных уравнений и неравенств с одной переменной, квадратных уравнений и неравенств,
- понятия определителей второго и третьего порядка,
- способы решения систем линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными,
- определение числовой функции, способы ее задания;
- понятие степени с действительным показателем и ее свойства;
- определение логарифма числа; свойства логарифмов;
- свойства и графики показательной, логарифмической и степенной функций,
- способы решения простейших показательных и логарифмических уравнений;
- способы решения показательных и логарифмических неравенств;
- определение радиана, формулы перевода градусной меры угла в радианную и обратно,
- основные формулы тригонометрии,
- способы решения простейших тригонометрических уравнений, способы решения простейших тригонометрических неравенств,
- определение производной, ее геометрический и механический смысл,
- правила и формулы дифференцирования функций,
- общую схему построения графиков функций с помощью производной;
- правило нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на промежутке
- определение неопределенного интеграла и его свойства;
- формулы интегрирования; - способы вычисления неопределенного интеграла;
- определение определенного интеграла, его геометрический смысл и свойства;
- способы вычисления определенного интеграла;
- понятие криволинейной трапеции, способы вычисления площадей криволинейных трапеций с помощью определенного интеграла;
- определения вектора, действий над векторами; свойства действий над векторами;
- понятие прямоугольной декартовой системы координат на плоскости и в пространстве;
- основные понятия стереометрии;
- аксиомы стереометрии и следствия из них;
- взаимное расположение прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей в пространстве;
- понятие многогранника, его поверхности,
- определения призмы, параллелепипеда; виды призм;
- определение пирамиды, правильной пирамиды;
- понятие тела вращения и поверхности вращения;

- определения цилиндра, конуса, шара, сферы; свойства перечисленных выше геометрических тел;
- понятия объема геометрического тела,
- формулы для вычисления объемов геометрических тел, перечисленных в содержании учебного материала;
- площади поверхности геометрического тела;
- формулы для вычисления площадей поверхностей геометрических тел, перечисленных в содержании учебного материал

уметь

- решать линейные и квадратные уравнения и уравнения, приводящие к ним,
- решать линейные и квадратные неравенства, системы неравенств,
- вычислять определители второго и третьего порядка,
- решать системы линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными
- находить область определения функции;
- выполнять действия над степенями,
- вычислять значения логарифмических выражений с помощью основных тождеств
- решать несложные уравнения, сводящиеся к простейшим с помощью тригонометрических формул,
- решать простейшие тригонометрические неравенства
- дифференцировать функции, используя таблицу производных и правила дифференцирования, находить производные сложных функций,
- применять производную для исследования реальных физических процессов (нахождения скорости неравномерного движения, угловой скорости, силы переменного тока, линейной плотности неоднородного стержня и т д),
- проводить исследования и строить графики многочленов;
- решать несложные прикладные задачи на нахождение наибольших и наименьших значений реальных величин.
- находить неопределенные интегралы, сводящиеся к табличным с
- помощью основных свойств и простейших преобразований,
- вычислять определенный интеграл с помощью основных свойств и формулы Ньютона-Лейбница;
- находить площади криволинейных трапеций;
- вычислять и изображать основные элементы прямых призм, пирамид;
- вычислять и изображать основные элементы прямых круговых цилиндра и конуса, шара,
- находить объем прямой призмы, пирамиды, прямого кругового цилиндра и конуса, шара.
- находить площади поверхностей призмы, пирамиды, цилиндра, конуса и шара.

2.2. Требования к процедуре выставления оценок

Оценки за выполнение практических работ выставляются по пятибалльной системе в журнал после выполнения и оформления работы, по результатам защиты работы, ответов на контрольные вопросы.

Критерий выставления оценок:

Оценка «5» ставится при своевременной сдаче отчета, 90-100% выполнении объема работы, правильных ответов на контрольные вопросы;

Оценка «4» ставится при своевременной сдаче отчета, 75-80% выполнении объема работы, при допущении незначительных неточностей в ответах на контрольные вопросы;

Оценка «3» ставится при сдаче отчета, 55-65 % выполнении объема работы, при допущении неточностей в ответах на контрольные вопросы;

Оценка «2» ставится при несдаче отчета, 0-50% выполнении объема работы, при допущении неточностей на контрольные вопросы.

Перечень лабораторных и практических занятий

Тема, содержание ЛПР
Практическая работа №1 Преобразование числовых и алгебраических выражений
Практическая работа №2 Решение уравнений и неравенств
Практическая работа №3 Действия с комплексными числами в алгебраической форме
Практическая работа №4 Преобразование выражений, содержащих корни
Практическая работа №5 Преобразование выражений, содержащих степени
Практическая работа №6 Преобразование выражений, содержащих степени и корни
Практическая работа №7 Вычисление значений логарифмических выражений
Практическая работа №8 Преобразование логарифмических выражений
Практическая работа №9 Основные тригонометрические тождества
Практическая работа №10 Формулы суммы и разности тригонометрических функций
Практическая работа №11 Решение простейших тригонометрических уравнений
Практическая работа №12 Решение тригонометрических уравнений
Практическая работа №13 Решение тригонометрических неравенств
Практическая работа №14 Построение графиков элементарных функций
Практическая работа №15 Решение рациональных уравнений и неравенств
Практическая работа №16 Решение иррациональных уравнений
Практическая работа №17 Решение показательных уравнений и неравенств
Практическая работа №18 Решение логарифмических уравнений и неравенств
Практическая работа №19 Вычисление производных
Практическая работа №20 Геометрический и механический смысл производной

Практическая работа №21 Исследование функций и построение графиков
Практическая работа №22 Нахождение интегралов методом непосредственного интегрирования
Практическая работа №23 Нахождение интегралов методом подстановки
Практическая работа №24 Вычисление площадей плоских фигур
Практическая работа №25 Решение простейших задач по комбинаторике
Практическая работа №26 Решение задачна перебор вариантов
Практическая работа №27 Решение задач на нахождение вероятностей событий с помощью теорем сложения и умножения
Практическая работа №28 Нахождение числовых характеристик случайной величины
Практическая работа №29 Решение задач по теме «Прямые и плоскости в пространстве»
Практическая работа №30 Выполнение действий над векторами
Практическая работа №31 Задачи в координатах
Практическая работа №32 Решение задач на нахождение элементов призм и построение сечений
Практическая работа №33 Решение задач на нахождение элементов пирамиды и построение сечений
Практическая работа №34 Решение задач на нахождение элементов цилиндра
Практическая работа №35 Решение задач на нахождение элементов конуса
Практическая работа №36 Решение задач на нахождение элементов шара и сферы
Практическая работа №37 Решение задач на нахождение объемов геометрических тел

Практическая работа №1
Преобразование числовых и алгебраических выражений

Цель: Повторить действия с дробями, порядок действий в выражениях, преобразование числовых выражений,

Оснащение рабочего места

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания;
2. Изучение теоретического материала по методической разработке;
3. Выполнение задания;
4. Ответы на вопросы.

Теоретический материал

1. Числа, употребляемые при счете предметов или для указания порядкового номера того или иного предмета среди однородных предметов, называются ***натуральными.***
Любое натуральное число можно записать с помощью десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Такую запись чисел называют *десятичной.*

Например: 24; 3711; 40125.

Множество натуральных чисел принято обозначать N.

Два числа, отличающиеся друг от друга только знаком, называются ***противоположными*** числами.

Например, числа 7 и – 7.

Числа натуральные, им противоположные, а также число нуль составляют множество целых чисел. Его принято обозначать Z.

Например: – 37; 0; 2541.

Число вида $\frac{m}{n}$, где m – целое число, n – натуральное число, называется обыкновенной дробью. Заметим, что любое натуральное число можно представить в виде дроби со знаменателем 1.

Например: $7=\frac{7}{1}$, $-12=-\frac{12}{1}$.

Объединение множеств целых и дробных чисел (положительных и отрицательных) составляет **множество *рациональных* чисел**. Его принято обозначать Q.

Например: $-\frac{25}{37}$; – 17,55; $\frac{38}{17}$.

Для всех чисел определены действия трёх ступеней:

- действия I ступени: сложение и вычитание;
- действия II ступени: умножение и деление;
- действия III ступени: возведение в степень и извлечение корня.

Выражение, составленное из чисел, знаков арифметических действий и скобок, называется ***числовым.***

Например: $13-(6+3\cdot 2):4$; $\dfrac{25-6}{3}$.

Число, полученное в результате выполнения действий, называется ***значением выражения.***

Числовое выражение не имеет смысла, если содержит деление на нуль.

- При нахождении значения выражения выполняются последовательно действия III ступени, II ступени и в конце действия I ступени. При этом необходимо учитывать размещение в числовом выражении скобок.
- Преобразование числового выражения заключается в последовательном выполнении арифметических действий над входящими в него числами с использованием соответствующих правил (правило сложения обыкновенных дробей с разными знаменателями, умножения десятичных дробей и др.). Задания на преобразование числовых выражений в учебных пособиях встречаются в следующих формулировках: «Найдите значение числового выражения», «Упростите числовое выражение», «Вычислите» и др.
- При нахождении значений некоторых числовых выражений приходится выполнять действия с дробями разного вида: обыкновенными, десятичными, периодическими. В этом случае бывает необходимо обратить обыкновенную дробь в десятичную или выполнить обратное действие – заменить периодическую дробь обыкновенной.
- Чтобы обратить десятичную дробь в обыкновенную, достаточно в числителе дроби записать число, стоящее после запятой, а в знаменателе – единицу с нулями, причем нулей должно быть столько, сколько цифр находится справа от запятой.

Например: $0{,}3=\dfrac{3}{10}$; $3{,}09=3\dfrac{9}{100}$.

Чтобы обратить обыкновенную дробь в десятичную, надо разделить ее числитель на знаменатель по правилу деления десятичной дроби на целое число.

Например: $\dfrac{3}{25}=3:25=0{,}12$;

$\dfrac{3}{7}=3:7=0{,}428571\ldots$;

$\dfrac{1}{3}=1:3=0{,}3333\ldots=0,(3)$.

Законы арифметических действий над действительными числами

1. ***Переместительный***(коммутативный) закон сложения: от перестановки слагаемых значение суммы не меняется:

$a+b=b+a$.

2. ***Переместительный*** (коммутативный) закон умножения: от перестановки множителей значение произведения не меняется:

$a\cdot b=b\cdot a$.

3. ***Сочетательный*** (ассоциативный) закон сложения: значение суммы не изменится, если какую-либо группу слагаемых заменить их суммой:

$(a+b)+c=a+(b+c)$.

4. ***Сочетательный***(ассоциативный) закон умножения: значение произведения не изменится, если какую-либо группу множителей заменить их произведением:

$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.

5. ***Распределительный*** (дистрибутивный) закон умножения относительно сложения: чтобы умножить сумму на число, достаточно умножить каждое слагаемое на это число и сложить полученные произведения:

$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$.

6. $a+0=a$.
7. $a+(-a)=0$.
8. $a\cdot 1=a$.
9. $a\cdot\dfrac{1}{a}=1,\ a\neq 0$.
10. $a\cdot 0=0$.

Свойства 6 – 10 называют законами поглощения 0 и 1.

Признаки делимости

Свойства, позволяющие в некоторых случаях, не производя деление, определить, делится ли одно число на другое, называются признаками делимости.

Признак делимости на 2.Число делится на 2 тогда и только тогда, когда запись числа оканчивается на четную цифру. То есть на 0, 2, 4, 6, 8.

Например: 12834; –2538; 39,42.

Признак делимости на 3. Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.

Например: 2742; –17940.

Признак делимости на 4. Число, содержащее не менее трех цифр, делится на 4 тогда и только тогда, когда делится на 4 двузначное число, образованное последними двумя цифрами заданного числа.

Например: 15436; –372516.

Признак делимости на 5. Число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра либо 0, либо 5.

Например: 754570; –4125.

Признак делимости на 9. Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

Например: 846; –76455.

Примеры выполнения заданий

Пример 1. Вычислите $\left(\dfrac{1}{2}+0{,}125-\dfrac{1}{6}\right)\cdot\left(6{,}4:\dfrac{80}{3}\right)+\dfrac{1}{8}$.

Решение. Так как $\frac{1}{6}$ *нельзя преобразовать в конечную десятичную дробь, то в первой скобке целесообразно перейти к обыкновенным дробям:*

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{6}=\frac{12+3-4}{24}=\frac{11}{24}$.

2) $6{,}4:\frac{80}{3}=\frac{64}{10}\cdot\frac{3}{80}=\frac{8\cdot 3}{10\cdot 10}=\frac{24}{100}=0{,}24$.

3) $\frac{11}{24}\cdot\frac{24}{100}=\frac{11}{100}=0{,}11$.

4) $0{,}11+\frac{1}{8}=0{,}11+0{,}125=0{,}235$.

Ответ. 0,235.

Пример 2. Вычислите $\dfrac{\left(0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}$.

Решение. Выполним вычисление по действиям.

1) $0{,}5:1{,}25=\frac{1}{2}:1\frac{1}{4}=\frac{1}{2}:\frac{5}{4}=\frac{1\cdot 4}{2\cdot 5}=\frac{2}{5}$;

2) $\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}=\frac{7\cdot 7}{5\cdot 11}=\frac{49}{55}$;

3) $\frac{2}{5}+\frac{49}{55}-\frac{3}{11}=\frac{22+49-15}{55}=\frac{56}{55}$;

4) $\frac{56}{55}\cdot 3=\frac{168}{55}$;

5) $1\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$;

6) $\frac{7}{4}:18\frac{1}{3}=\frac{7}{4}:\frac{55}{3}=\frac{21}{4\cdot 55}$;

7) $\frac{168}{55}:\frac{21}{4\cdot 55}=\frac{168\cdot 4\cdot 55}{55\cdot 21}=32$.

Ответ. 32.

Задания для самостоятельной работы

1. Имеет ли смысл выражение:

   а) $6{,}3:(2{,}5\cdot 9-22{,}5)$; б) $(15-2{,}5\cdot 6):4{,}2$?

2. Используя переместительный и сочетательный законы, вычислите значение выражения наиболее рациональным способом:

   а) $\frac{3}{5}+3\frac{3}{4}+1\frac{2}{5}+1\frac{1}{4}$;

   б) $5{,}3+4{,}25-2{,}3+0{,}75$;

   в) $2\frac{1}{4}\cdot 1\frac{1}{7}\cdot 4\cdot 7$.

3. Используя распределительный закон, вычислите наиболее рациональным способом:

а) $4\frac{3}{5}\cdot 2\frac{3}{7}+2\frac{2}{5}\cdot 2\frac{3}{7}$;

б) $6{,}71\cdot 2{,}8-4{,}71\cdot 2{,}8$.

4. Выполните действие наиболее рациональным способом:

а) $4\frac{11}{15}\cdot 5+3\frac{7}{9}\cdot 3$;

б) $16\frac{8}{15}:8-10\frac{2}{3}:10$.

5. Выполните действие:

а) $\dfrac{2{,}5\cdot 1\frac{13}{19}-4{,}5:1\frac{4}{15}}{6{,}5:4{,}75-0{,}5\cdot\frac{2}{19}}$;

б) $\dfrac{6\frac{1}{15}\cdot 0{,}5-2{,}5:1{,}2}{0{,}6:2{,}4+\frac{2}{3}\cdot 0{,}15}$.

6. Найдите значение выражения:

$$\frac{3\frac{3}{4}:1\frac{1}{2}+\left(1\frac{1}{2}:3\frac{3}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{2}+\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}}{2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}-\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}}.$$

7. Вычислите: $\dfrac{(2{,}1-1{,}965):(1{,}2\cdot 0{,}045)}{0{,}00325:0{,}013}-\dfrac{1:0{,}25}{1{,}6\cdot 0{,}625}$.

8. Упростите выражение:

$$\frac{\left(\left(3\frac{7}{12}-2\frac{11}{18}+2\frac{1}{24}\right)\cdot 1\frac{5}{31}-\frac{3}{52}\left(3\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\right)\cdot 1\frac{7}{13}}{\frac{19}{84}:\left(5\frac{13}{42}-2\frac{13}{28}+\frac{5}{24}\right)+1\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}.$$

9. Вычислите:

а) $8\frac{13}{20}-\left(18\frac{13}{24}+\frac{19}{60}\right)+10\frac{5}{24}$;

б) $5+4\frac{13}{19}-\left(8\frac{2}{11}-7\frac{6}{19}\right)+\left(4\frac{2}{5}-12\frac{9}{11}\right)$;

в) $\left(-\frac{3}{4}-0{,}25\right)\cdot\frac{3}{4}\cdot 1\frac{1}{3}+\frac{2}{15}$;

г) $\left(23\frac{5}{6}-50\right):(54{,}3-70)$;

д) $-19\frac{1}{2}:\left(-4\frac{2}{5}-78{,}52:5{,}2\right)$;

е) $\left(9\frac{4}{5}:2{,}3-4\frac{6}{23}+6\frac{1}{2}\right):\left(\left(-3\frac{3}{5}-7\frac{2}{3}\right):(-1)\right)$;

ж) $5\frac{2}{9}\cdot\frac{34}{47}:\left(-3\frac{2}{5}\right)+\left(-25\frac{1}{2}+25{,}5\right)\cdot 3\frac{2}{3}$;

Контрольные вопросы:

1. Какие числа называются натуральными?
2. Привести пример иррациональных чисел.
3. Записать формулы сокращенного умножения

Литература

1. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. – М., 1990.
2. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. Алгебра: Доп. главы к шк. учеб. 8 кл.: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики / Под редакцией Г.В. Дорофеева. – М., 1996.
3. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. сред. шк. – М.: Просвещение. 1989.
4.

Практическая работа № 2
Решение уравнений и неравенств

Цель: Отработка умений и навыков решения уравнений и неравенств.

Оснащение рабочего места

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания;
2. Изучение теоретического материала по методической разработке;
3. Выполнение задания;
4. Ответы на вопросы.

Теоретический материал. ***Решение уравнения осуществляется в три этапа:***

Первый этап – ***технический.*** На этом этапе осуществляют преобразования по схеме (1) (2) (3) (4) … и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Второй этап – ***анализ решения.*** На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными.

Третий этап – ***проверка.*** Если анализ, проведенный на втором этапе, показывает, что некоторые преобразования могли привести к уравнению-следствию, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение.

Теорема 1. Если какой – либо многочлен уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 3. Если обе части уравнения f (x) и g(x) умножить на одно и тоже выражение h(x), которое:

а) имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения $f(x)= g(x)$;

б) нигде в этой области не обращается в 0, - то получится уравнение $f(x)h(x) = g(x)h(x)$, равносильное данному.

Теорема 4. Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же четную степень n получится уравнение, равносильное данному: $f(x)^n = g(x)^n$.

Решение неравенств.

Теорема 1. Если какой – либо член неравенства перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части неравенства возвести в одну и ту же нечетную степень, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.

Теореме 3. Если обе части неравенства f(x)> g(x) умножить на одно и то же выражение h(x), положительное при всех x из области определения (области допустимых значений переменной) неравенства f(x)> g(x), оставив при этом знак неравенства без изменения, то получится неравенство f(x)h(x) > g(x) h(x), равносильно данному.

б) Если обе части неравенства f(x)> g(x) умножить на одно и то же выражение h(x), отрицательное при всех x из области определения неравенства f(x)> g(x), изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство f(x) h(x) < g(x) h(x),
равносильно данному.

Теорема 4. Если обе части неравенства f(x)> g(x) неотрицательны в области его определения (в ОДЗ), то после возведения обоих частей неравенства в одну и ту же степень n получится неравенство того же смысла $f(x)^n > g(x)^n$, равносильное данному.

Задания для самостоятельной работы

Вариант № 1

1. Решить уравнения:

1) $13(x-2)-3x=12x-7$
2) $3(x-4)-2(x+3)=5$
3) $7x^2-2x=0$
4) $x^2-8x+7=0$
5) $5x^2-11x+2=0$
6) $11-3\sqrt{x}=5$
7) $4x+\sqrt{5x+10}=17$

2. Решить неравенства.

1) $2x-5<4-3(x-2)$
2) $x^2-5x+4<0$
3) $x^2>3x-2$

Вариант №2

1. Решить уравнения:

1) $3x-2=4x-2(x-1)$
2) $3(7-8x)-7(3-4x)=1$
3) $5x^2-10x=0$
4) $x^2+x-6=0$
5) $2x^2-7x+3=0$
6) $3+5\sqrt{x}=13$
7) $x+\sqrt{25-x^2}=7$

2. Решить неравенства.

1) $4x - 6 > 1 - 2(x+1)$

2) $x^2 - 7x + 12 > 0$

3) $x^2 + 4 > 5x$

Контрольные вопросы:

1. Какие уравнения называются целыми?
2. Как найти степень целого уравнения?
3. Какими способами решаются уравнения 3-ей и 4-ой степени?

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова

Практическая работа №3

Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

Цель: Научиться выполнять действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

Оснащение рабочего места

4. Настоящая методическая разработка;
5. Учебная литература;
6. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

5. Получение индивидуального задания;
6. Изучение теоретического материала по методической разработке;
7. Выполнение задания;
8. Ответы на вопросы.

Теоретический материал.

Число вида Z =a+bi (1), где a и b- любые действительные числа, а i- мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1$, называется ***комплексным числом.***

Запись комплексного числа Z в виде (1) называется ***алгебраической формой*** **комплексного числа.**

Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Сложение, вычитание, умножение комплексных чисел в алгебраической форме производят по правилам соответствующих действий над многочленами.

Пример 1

$Z_1 = 2 + 3i$, $Z_2 = 5 - 7i$.

Найти: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 * z_2$.

Решение: а) $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 7i) = 2 + 3i + 5 - 7i = (2 + 5) + (3i - 7i) = 7 - 4i$;

б) $z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (5 - 7i) = 2 + 3j - 5 + 7i = (2 - 5) + (3i + 7i) = -3 + 10i$;

в) $z_1 * z_2 = (2 + 3i) * (5 - 7i) = 10 - 14i + 15i - 21i^2 = 10 + i + 21 = 31 + i$

Определение: *Два комплексных числа называются* ***сопряженными,*** *если они отличаются друг от друга только знаками перед мнимой частью.*

Произведение двух сопряженных чисел всегда равно действительному числу. Чтобы выполнить деление, произведем дополнительное действие: умножим делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю.

Пример 2:

$$\frac{2+3i}{5-7i} = \frac{(2+3i)(5+7i)}{(5-7i)(5+7i)} = \frac{10+14i+15i+21i^2}{25-49i^2} = \frac{29i-11}{74} = \frac{29}{74}i - \frac{11}{74}$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1.

1. Вычислить: а) $i^{66}, i^{143}, i^{216}, i^{137}$ б) $i^{43}+i^{48} * i^{45} - i^7$
2. Произвести сложение и вычитание чисел.

а) (3+5i)+(7-2i) б) (6+2i) – (7-2i)

3. Выполнить умножение и деление чисел. а) $z_1=6+4i$, $z_2=3i$ б) $z_1=6+3i$, $z_2= 5-3i$
4. Выполнитьдействия:

а) $(3+5i)^2$, б)$(2-7i)^2$в)$(4-2i)(4+2i)$ г)$(6+i)(6-2i)$ д)$(3+2i)^3$е)$(5-i)^3$

Вариант 2

Вычислить: а) i^{48}, i^{243}, i^{116}, i^{77}б) $i^{15}+i^{38} * i^{15} - i^{12}$

2. Произвести сложение и вычитание чисел.

а) $(6-5i)+(8-2i)$ б) $(-5+2i) - (4+2i)$

3. Выполнить умножение и деление чисел. а) $z_1=5-4i$, $z_2=7i$ б) $z_1=9+3i$, $z_2= 2-3i$

4. Выполнитьдействия:

а) $(6-5i)^2$, б)$(1-5i)^2$в)$(3+2i)(3-2i)$ г)$(7+i)(7-2i)$ д)$(2+3i)^3$ е)$(6-i)^3$

Контрольные вопросы:

1. Какие числа называются натуральными?
2. Привести пример иррациональных чисел.
3. Записать формулы сокращенного умножения

Литература:

4. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
5. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
6. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова

Практическая работа №4
Преобразование выражений, содержащих корни

Цель: корректировка знаний, умений и навыков по теме: «Преобразование выражений, содержащих радикалы», закрепить и систематизировать знаний.

Оснащение рабочего места

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания;
2. Изучение теоретического материала по методической разработке;
3. Выполнение задания;
4. Ответы на вопросы.

Теоретический материал.

*Корнем **n-й** степени из числа **a** называется такое число **b**, **n-я** степень которого равна **a**, то есть*

$$\boxed{\begin{array}{l}\sqrt[n]{a}=b\\ b^n=a\end{array}}$$

Например, $\sqrt[3]{-8}=-2;\ \sqrt[3]{8}=2$

Корень четной степени из отрицательного числа не существует. Например, $\sqrt[2]{-16}$ – *не имеет смысла*

Пример 1

$$\sqrt{81}=9\ \left(9^2=81\right);\ \sqrt[3]{27}=3\ \left(3^3=27\right);\ \sqrt[4]{625}=5\ \left(5^4=625\right);\ \sqrt[5]{0}=0\ \left(0^5=0\right)$$

Пример 2

$$\sqrt[3]{-27}=-3\ \left((-3)^3=-27\right);\ \sqrt[99]{-1}=-1\ \left((-1)^{99}=-1\right)$$

Свойства арифметического корня

1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$

2) $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$

3) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$

4) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

5) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$

6) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1.

1. Найдите значение выражения: $\sqrt[3]{-27}$.
2. Решите уравнение: $x^4=-16$.
3. Вычислите: а) $\sqrt[3]{1000\cdot 27\cdot 8}$; б) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; в) $\sqrt[5]{0{,}4^5\cdot 5^5}$; г) $\frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}$.
4. Какое из чисел больше: $\sqrt[7]{128}$ или $\sqrt[5]{4}$?

Вариант 2.

1. Найдите значение выражения: $\sqrt[4]{625}$.
2. Решите уравнение: $x^3=125$.
3. Вычислите: а) $\sqrt[3]{64\cdot 125\cdot 729}$; б) $\sqrt[5]{\frac{243}{32}}$; в) $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^6\cdot 12^6}$; г) $\frac{\sqrt[4]{20}}{\sqrt[4]{\frac{5}{4}}}$.
4. Какое из чисел больше: $\sqrt[8]{26}$ или $\sqrt[4]{5}$?

Вариант 3.

1. Найдите значение выражения: $\sqrt[7]{-128}$.
2. Решите уравнение: $x^4=64$.
3. Вычислите: а) $\sqrt[4]{0{,}0081\cdot 0{,}0016\cdot 625}$; б) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$; в) $\sqrt[3]{16^3\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^3\cdot 0{,}125}$; г) $\frac{\sqrt[4]{112}}{\sqrt[4]{7}}$.
4. Какое из чисел больше: $\sqrt[5]{5}$ или $\sqrt[3]{3}$?

Контрольные вопросы:

1) Какие из следующих записей не имеют смысла?

$$\sqrt[16]{3};\ \ -\sqrt[4]{2};\ \ \sqrt[5]{0};\ \ \sqrt[6]{-6};\ \ \sqrt{-12};\ \ \sqrt[7]{10};\ \ \sqrt[8]{-22};\ -\sqrt[9]{-7}.$$

2) При каких значениях переменной а выражение имеет смысл?

$$\sqrt{a};\ \ \sqrt{a^2};\ \ \sqrt{-a};\ \ \sqrt{a^3};\ \ \sqrt{-a^2};\ \ \sqrt[3]{a};\ \ \sqrt[4]{a};\ \ \sqrt{-a^5};\ \ \sqrt[5]{a^2};\ \sqrt[6]{a^3}.$$

3) Какие из следующих записей не имеют смысла?

$$\sqrt[16]{3};\ \ -\sqrt[4]{2};\ \ \sqrt[5]{0};\ \ \sqrt[6]{-6};\ \ \sqrt{-12};\ \ \sqrt[7]{10};\ \ \sqrt[8]{-22};\ -\sqrt[9]{-7}.$$

Литература

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова

Практическая работа №5
Преобразование выражений, содержащих степени

Цель: научиться применять свойства степеней при преобразовании выражений со степенями

Оснащение рабочего места

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания;
2. Изучение теоретического материала по методической разработке;
3. Выполнение задания;
4. Ответы на вопросы

Теоретический материал.

1. *Определение.* ***(- n)****-й степенью (n – натуральное) числа* ***a****, не равного нулю, считается число, обратное* ***n****-й степени числа* ***a:***

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Примеры. *Вычислить:*

$1)\ 3^{-2};\qquad 2)\ \frac{3}{5^{-2}};\qquad 3)\ \frac{4^{-3}}{7^{-2}}.$

Решение.

$1)\ 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9};\quad 2)\ \frac{3}{5^{-2}} = 3\cdot 5^2 = 3\cdot 25 = 75;\quad 3)\ \frac{4^{-3}}{7^{-2}} = \frac{7^2}{4^3} = \frac{49}{64}.$

2. *Следующая формула позволяет заменить обыкновенную дробь с отрицательным показателем на обратную ей дробь с положительным показателем****:***

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

Примеры. *Вычислить:*

$4)\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-3};\qquad 5)\ \left(\frac{4}{5}\right)^{-2};\qquad 6)\ (0{,}1)^{-4}.$

Решение.

$4)\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8};\quad 5)\ \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{16} = 1\frac{9}{16};$

$6)\ (0{,}1)^{-4} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-4} = \left(\frac{10}{1}\right)^4 = 10^4 = 10000.$

3. *Свойства степени с натуральным показателем справедливы и для степеней с любым показателем.*

Для любых действительных и отличных от нуля чисел a и b, а также любых целых чиселm и n справедливы следующие **свойства степеней с целыми показателями**:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$;
3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;
4. $(a : b)^n = a^n : b^n$;
5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

Примеры

Упростить:

7) $\frac{3^5 \cdot 3^{10}}{3^6 \cdot 3^7}$; 8) $\frac{2^4 \cdot 2^6 \cdot 2^3}{2^5 \cdot 2^7}$; 9) $\frac{7^3 \cdot 4^3}{7^2 \cdot 4^5}$; 10) $\frac{(2 \cdot 3)^7}{2^6 \cdot 3^5}$.

Решение.

7) $\frac{3^5 \cdot 3^{10}}{3^6 \cdot 3^7}$.

I способ.

$$\frac{3^5 \cdot 3^{10}}{3^6 \cdot 3^7} = \frac{3^{5+10}}{3^{6+7}} = \frac{3^{15}}{3^{13}} = 3^{15-13} = 3^2 = 9.$$

II способ.

$$\frac{3^5 \cdot 3^{10}}{3^6 \cdot 3^7} = 3^5 \cdot 3^{10} \cdot 3^{-6} \cdot 3^{-7} = 3^{5+10-6-7} = 3^2 = 9.$$

При решении **7** примера **I способом** мы использовали свойства умножения и деления степеней с одинаковыми основаниями**:** $\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ и $\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}}$**.** При решении **II способом** мы использовали понятие степени с отрицательным показателем**:** $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ и свойство произведения степеней с одинаковыми основаниями**:** $\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$.

8) $\frac{2^4 \cdot 2^6 \cdot 2^3}{2^5 \cdot 2^7}$.

$$\frac{2^4 \cdot 2^6 \cdot 2^3}{2^5 \cdot 2^7} = 2^{4+6+3-5-7} = 2^1 = 2.$$

Пример **8)** решаем так же, как решали пример **7)**вторым способом.

9) $\frac{7^3 \cdot 4^3}{7^2 \cdot 4^5}$.

$$\frac{7^3 \cdot 4^3}{7^2 \cdot 4^5} = \frac{7^2 \cdot 4^3 \cdot 7}{7^2 \cdot 4^3 \cdot 4^2} = \frac{7}{16}.$$

В примере **9)** представим $\mathbf{7^3}$ как $\mathbf{7^2 \cdot 7}$, а степень $\mathbf{4^5}$ как$\mathbf{4^3 \cdot 4^2}$, а затем сократим дробь на $\mathbf{(7^2 \cdot 4^3)}$.

В **10)** примере применим формулу степени произведения: $(ab)^n=a^n \cdot b^n$, а затем сократим дробь на $(2^6 \cdot 3^5)$.

10) $\frac{(2\cdot 3)^7}{2^6\cdot 3^5}$.

$$\frac{(2\cdot 3)^7}{2^6\cdot 3^5} = \frac{2^7\cdot 3^7}{2^6\cdot 3^5} = \frac{2^{6+1}\cdot 3^{5+2}}{2^6\cdot 3^5} = \frac{2^6\cdot 3^5\cdot 2^1\cdot 3^2}{2^6\cdot 3^5} = 2^1\cdot 3^2 = 2\cdot 9 = 18.$$

4. ***Определение***. *Степенью числа a>0 с рациональным показателем* $r=\frac{m}{n}$, *где* m - *целое число, а* n - *натуральное (n>1), называется число* $\sqrt[n]{a^m}$, *т.е.* $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ a>0$

Пример 11. $7^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7};\ 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32};\ a^{-\frac{7}{15}} = \sqrt[15]{a^{-7}}$

Примеры.

1) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

2) $12^{1,4} = 12^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{12^7}$

3) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2\frac{2}{5}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{12}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{4}{9}\right)^{-12}} = \sqrt[5]{\left(\frac{9}{4}\right)^{12}}$

ТРЕНИРОВОЧНАЯ ТАБЛИЦА

Вычислите:

8	$(\sqrt{32})^{\frac{2}{5}}$	$4^{-\frac{3}{2}}$	$64^{\frac{5}{6}}$	$32^{-\frac{3}{5}}$	$(\sqrt{27})^{\frac{2}{3}}$	$32^{\frac{4}{5}}$	$(\sqrt{8})^{\frac{2}{3}}$	$16^{-\frac{3}{4}}$
7	$32^{-\frac{3}{5}}$	$\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$125^{-\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$	$16^{-\frac{1}{4}}$	$\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$81^{-\frac{1}{4}}$	$\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$
6	$16^{\frac{1}{4}}$	$64^{\frac{1}{2}}$	$8^{\frac{1}{3}}$	$32^{\frac{1}{5}}$	$27^{\frac{1}{3}}$	$81^{\frac{1}{4}}$	$64^{\frac{1}{3}}$	$25^{\frac{1}{2}}$
5	$(\sqrt{7})^2$	$(\sqrt{2})^8$	$(\sqrt{5})^4$	$(\sqrt{2})^{10}$	$(\sqrt{6})^4$	$(\sqrt{2})^6$	$(\sqrt{3})^4$	$(\sqrt{5})^0$
4	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$
3	6^{-2}	2^{-4}	3^{-3}	5^{-1}	3^{-4}	2^{-3}	7^{-2}	4^{-1}

2	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$\left(\frac{3}{5}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^1$	$\left(\frac{4}{3}\right)^3$	$\left(\frac{1}{3}\right)^4$	$\left(\frac{2}{5}\right)^3$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2$
1	3^4	4^3	2^4	5^3	2^5	3^3	5^0	2^3
	A	**B**	**c**	**D**	**e**	**f**	**g**	**h**

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1. Вычислите: а) 2^{-1}; б) $27^{\frac{1}{3}}$; в) $\left(\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$; г) $\frac{25\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}}{625\cdot 5^{-3}}$.

Вариант 2. Вычислите: а) 1^{-7}; б) $27^{\frac{2}{3}}$; в) $9\cdot 0{,}027^{-\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}$; г) $48^{\frac{2}{5}}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Вариант 3. Вычислите: а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; б) $125^{\frac{2}{3}}$; в) $4^{-2}\cdot\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$; г) $\frac{12^{\frac{3}{4}}\cdot 3^{\frac{9}{4}}}{4^{-\frac{1}{4}}}$.

Вариант 4. Вычислите: а) $(-1)^{-7}$; б) $36^{-\frac{1}{2}}$; в) $\left(\frac{1}{625}\right)^{-0{,}75}-12\cdot 0{,}0081^{-0{,}25}$;

Вариант 5. Вычислите: а) $5^0\cdot(-3)^{-2}+(-3)^{-2}$; б) $16^{-\frac{1}{4}}$; в) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}}$;

Вариант 6. Вычислите: а) $0^{\frac{5}{6}}$; б) $100^{-\frac{1}{2}}$; в) $2^{\frac{4}{5}}\cdot 2^{\frac{11}{5}}$; г) $\frac{2\cdot 4^{-2}+\left(81^{-\frac{1}{2}}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-3}}{125^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}+\left(\sqrt{3}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$.

Вариант 7. Вычислите: а) $\left(6\cdot 2^{-2}\right)^{-1}$; б) $9^{-\frac{3}{2}}$; в) $\left(\left(\frac{9}{4}\right)^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}$; г) $\frac{6^{1{,}7}\cdot 2^{1{,}3}}{3^{-1{,}3}}$.

Вариант 8.Вычислите: а) $(-3)^{-4}$; б) $0.01^{-\frac{1}{2}}$; в) $\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

г) $136^0+0{,}027^{-\frac{1}{3}}+\left(0{,}2^{-13}\cdot 125^{-3}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4\right)^{-2}$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение степени с натуральным, отрицательным и дробным показателями.
2. Перечислите свойства степеней с рациональным показателем.

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова

Практическая работа №6

Преобразование выражений, содержащих степени и корни

Цель: закрепить и систематизировать знания по темам «Степени и корни», научиться применять свойства радикалов и степеней при преобразовании выражений.

Оснащение рабочего места

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания;
2. Изучение теоретического материала по методической разработке;
3. Выполнение задания;
4. Ответы на вопросы.

Теоретический материал.

1. *Свойства степени с натуральным показателем справедливы и для степеней с любым показателем.*

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$;
3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;
4. $(a:b)^n = a^n : b^n$
5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

6. *Свойства арифметического корня*

1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

2) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$

3) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

4) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

5) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

6) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$

Задания для самостоятельной работы

Найдите значение выражения

1. $\sqrt{548^2 - 420^2}$. 2. $\dfrac{(5\sqrt{6})^2}{8}$ 3. $\dfrac{\sqrt{5,6} \cdot \sqrt{3,5}}{\sqrt{0,4}}$ 4. $3 \cdot \sqrt[6]{243} \cdot \sqrt[30]{243}$	6. $\dfrac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{2}}$ 7. $4^{\sqrt{6}+7} \cdot 4^{-5-\sqrt{6}}$. 8. $\sqrt[6]{216} \cdot \sqrt[4]{36}$ 9. $\dfrac{\left(\sqrt[5]{13a^2}\right)^{10}}{a^4}$	$\dfrac{6\sqrt[54]{m} \cdot \sqrt[27]{m}}{\sqrt[18]{m}}$ 11. 12. $\sqrt{754^2 - 304^2}$. 13. $\dfrac{\sqrt{49\sqrt[11]{b}}}{\sqrt[22]{b}}$ $\dfrac{(\sqrt{3}a)^6 \sqrt{a^9}}{}$ $3^{\sqrt{8}+2} \cdot 3^{4+3\sqrt{8}} : 3^{4\sqrt{8}+5}$

5. $\left(\dfrac{27^{\frac{1}{6}}\cdot 27^{\frac{1}{9}}}{\sqrt[18]{27}}\right)^{3}$	10. $\dfrac{\left(\sqrt[5]{13a^{2}}\right)^{10}}{a^{4}}$	14. 15.

Вариант 1

1. Представьте выражение в виде степени числа x (x>0): а) $\sqrt[5]{x^3}\cdot\sqrt{x}$ **; б)** $\dfrac{x^{0,5}}{\left(\sqrt[4]{x}\right)^2}$ **.**

2. Вычислите: а) $\dfrac{3^{\frac{2}{3}}\cdot 81^{\frac{3}{4}}}{3^{-\frac{1}{3}}}$ **; б)** $\left(10^{-\frac{1}{3}}\cdot 0{,}01^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$ **.**

3. Упростите выражения: а) $(16x)^{\frac{3}{4}}\cdot\left(\dfrac{1}{8}x^{\frac{3}{8}}\right)^{-\frac{2}{3}}$ **; б)** $\left(a+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a-b^{\frac{1}{4}}\right)+\sqrt{b}$ **; в)** $\dfrac{ab^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b}{(ab)^{\frac{1}{3}}}$ **.**

4. Сравните числа: а) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ **и** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ **; б)** $\sqrt[7]{5^3}$ **и** $5^{0,4}$**.**

Вариант 2

1. Представьте выражение в виде степени числа x (x>0): а) $\sqrt[10]{x^9}\cdot x^{1,1}$**; б)** $\dfrac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^3}{\sqrt{x}}$ **.**

2. Вычислите: а) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot 8^{\frac{2}{3}}}{2^{-\frac{1}{2}}}$ **; б)** $\left(25^{-\frac{1}{4}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$ **.**

3. Упростите выражения: а) $(1000x)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(0{,}01x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ **; б)** $\left(a^{\frac{1}{3}}-b\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+b\right)-\sqrt[3]{a^2}$ **; в)** $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}b+ab^{\frac{1}{4}}}{(ab)^{\frac{1}{4}}}$ **.**

4. Сравните числа: а) $3^{-\frac{1}{3}}$ **и** $3^{\frac{1}{3}}$**; б)** $(0{,}5)^{0,2}$ **и** $\sqrt[9]{0{,}25}$**.**

Вариант 3

1. Представьте выражение в виде степени числа x (x>0): а) $\dfrac{x\cdot\sqrt[3]{x}}{x^{-\frac{2}{3}}}$ **; б)** $\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x}\cdot\left(x^{\frac{1}{8}}\right)^{-6}$

.

2. Вычислите: а) $\dfrac{4^{-0,5}\cdot 8^{\frac{4}{5}}}{\left(\sqrt[5]{2}\right)^2}$ **; б)** $\left(10^3\cdot 0{,}001^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ **.**

Практическая работа №7

Вычисление значений логарифмических выражений

Цель: научиться вычислять простые логарифмы

Оснащение рабочего места

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания;
2. Изучение теоретического материала по методической разработке;
3. Выполнение задания;
4. Ответы на вопросы.

Теоретический материал.

Определение Логарифмом *числа* b *по основанию а (* $\log_a b$ *) называется такое число с, что* $b = a^c$*, то есть записи* $\log_a b = c$ *и* $b = a^c$ *равносильны. Логарифм имеет смысл, если* $a > 0, a \neq 1, b > 0$.

Специальные обозначения:

1. *Натуральный логарифм* $\ln a$ - *логарифм по основанию* e*, где* e - *число Эйлера*.
2. *Десятичный логарифм* $\lg a$ - *логарифм по основанию 10.*

Свойства логарифмов:

1° $a^{\log_a b} = b$ - *основное логарифмическое тождество*.

2° $\log_a a = 1, a > 0, a \neq 1$

3° $\log_a 1 = 0, a > 0, a \neq 1$

Логарифм единицы по любому положительному, отличному от 1, основанию равен нулю. Это возможно потому, что из любого действительного числа можно получить 1 только возведя его в нулевую степень.

4° $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ - *логарифм произведения*.

Логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей.

5° $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ - *логарифм частного.*

Логарифм частного (дроби) равен разности логарифмов сомножителей.

6° $\log_a b^p = p \cdot \log_a b$ - *логарифм степени.*

Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания.

7° $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$

8° $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

9° $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ - *переход к новому основанию.*

Примеры решения задач

Пример 1. Вычислите $\log_2 8$ *Решение:* $\log_2 8 = 3$*.(т.к.* $2^3 = 8$*)*

Пример2. Вычислите $\log_5 25$*. Решение:* $\log_5 25 = 2$

Пример 3. Вычислите $\log_2 2^4$ *Решение:* $\log_2 2^4 = 4$

Пример 4. Вычислите $\log_6 \frac{1}{36}$ *Решение.* $\log_6 \frac{1}{36} = -2$

Пример 5 Вычислите $\log_{\frac{1}{3}} 27$ *Решение:* $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -4$

Пример 6. Вычислить $\log_a \sqrt{ab}$*, если* $\log_a b = 7$

Решение. Перепишем данное выражение, используя свойство логарифма степени и логарифма произведения: $\log_a \sqrt{ab} = \frac{1}{2}\log_a(ab) = \frac{1}{2}(\log_a a + \log_a b) = \frac{1}{2}(1+7) = 4$

Ответ. $\log_a \sqrt{ab} = 4$

Пример7. Упростить выражение $\frac{3\lg 4 + \lg\frac{1}{2}}{\lg 7 - \lg 14}$

Решение.Перепишем числитель, используя свойство для степени логарифма,

а знаменатель, используя свойство -логарифм произведения:

$$\frac{3\lg 4 + \lg\frac{1}{2}}{\lg 7 - \lg 14} = \frac{3\lg 2^2 + \lg 2^{-1}}{\lg 7 - \lg(7\cdot 2)} = \frac{3\cdot 2\cdot \lg 2 - \lg 2}{\lg 7 - (\lg 7 + \lg 2)} =$$

$$= \frac{6\cdot\lg 2 - \lg 2}{\lg 7 - \lg 7 - \lg 2} = \frac{5\lg 2}{-\lg 2} = -5$$

Задания для самостоятельной работы

	1 вариант	2 вариант
1. Вычислите	А) $\log_3 27$ Б) $\log_9 \frac{1}{81}$ в) $\log_{\frac{1}{5}} 125$ г) $\log_{0,2} 5$	А) $\log_4 64$ б) $\log_7 \frac{1}{49}$ в) $\log_{\frac{1}{3}} 81$ г) $\log_{0,5} 2$
2. Вычислите	А) $\log_{98} 1$ Б) $\log_{12} 12$ В) $\log_9 9^5$	А) $\log_{79} 1$ Б) $\log_{71} 71$ В) $\log_{0,78} 0,78^4$
3. Чему равен x? Запишите ответ с помощью логарифма	А) $3^x = 8$ Б) $0,9^x = 23$ В) $\left(\frac{1}{6}\right)^x = 31$	А) $5^x = 7$ Б) $0,8^x = 17$ В) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 10$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение десятичного логарифма
2. Свойства логарифма

Литература

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова

Практическая работа №8
Преобразование логарифмических выражений

Цель: научиться преобразовывать выражения, содержащие логарифмы, применяя свойства логарифмов.

Оснащение рабочего места

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания;
2. Изучение теоретического материала по методической разработке;
3. Выполнение задания;
4. Ответы на вопросы.

Теоретический материал.

Определение Логарифмом *числа* b *по основанию а* ($\log_a b$) *называется такое число с, что* $b = a^c$, *то есть записи* $\log_a b = c$ *и* $b = a^c$ *равносильны. Логарифм имеет смысл, если* $a > 0, a \neq 1, b > 0$.

Специальные обозначения:

1. *Натуральный логарифм* $\ln a$ - *логарифм по основанию* e, *где* e - *число Эйлера.*
2. *Десятичный логарифм* $\lg a$ - *логарифм по основанию 10.*

Свойства логарифмов:

1° $a^{\log_a b} = b$ - *основное логарифмическое тождество.*

2° $\log_a a = 1, a > 0, a \neq 1$

3° $\log_a 1 = 0, a > 0, a \neq 1$

Логарифм единицы по любому положительному, отличному от 1, основанию равен нулю. Это возможно потому, что из любого действительного числа можно получить 1 только возведя его в нулевую степень.

4° $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$ - *логарифм произведения.*

Логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей.

5° $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ - *логарифм частного.*

Логарифм частного (дроби) равен разности логарифмов сомножителей.

6° $\log_a b^p = p \cdot \log_a b$ - *логарифм степени.*

Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания.

7° $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$

8° $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

9° $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ - *переход к новому основанию.*

Примеры.

1. *Доказать тождество:* $\log_3 12 = \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1$

Доказательство.

Приведем все логарифмы, стоящие в правой части приведенного равенства к одному основанию 3, используя формулу для замены основания логарифма:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

тогда выражение примет вид:

$$\log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1 = \log_3 7 \cdot \frac{\log_3 5}{\log_3 7} \cdot \frac{\log_3 4}{\log_3 5} + 1 =$$

$$= \log_3 4 + 1$$

Учитывая тот факт, что $\log_a a = 1$, *можем записать:*

$$\log_3 4 + 1 = \log_3 4 + \log_3 3$$

Согласно свойству суммы логарифмов получаем окончательный ответ

$$\log_3 4 + 1 = \log_3 4 + \log_3 3 = \log_3(3 \cdot 4) = \log_3 12$$

В итоге:

$$\log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1 = \log_3 4 + \log_3 3 = \log_3 12$$

Что и требовалось доказать.

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислите: $4^{1+\frac{1}{2}\log_2 5}$
2. Вычислите: $\log_{14} \cdot \log_4 \cdot \log_{\sqrt{5}} 25$
3. Упростите выражение: $7^{1+\log_7 4}$
4. Упростить выражения:
5. $2^{4\log_2 3 - 1} + \log_9 3 + \log_3 64 \cdot \log_4 3$;
6. $4(3^{1-\log_9 4} + 5^{2\log_{125} 8})$
7. Вычислите: $\log_{\sqrt{8}} 64$
8. Упростить выражения:

а) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log_{10} 2} - 8^{\log_2 3}$

б) $72 \cdot (49^{\frac{1}{2}\log_7 9 - \log_7 6 \cdot} + 5^{-\log_{\sqrt{5}} 4})$

9. Вычислитеlog626−log613+log618
10. Упростить выражения:

а) $5\log_2 9\,\log_3 64 + 3^{\log_6 8} \cdot 2^{\log_6 8}$ *б)* $9^{log_3 4\cdot} + log_{\sqrt{6}}3 \cdot log_3 36$

Контрольные вопросы:
Дайте определение десятичного логарифма
Свойства логарифма

Литература

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова

Практическая работа №9

Основные тригонометрические тождества

Цель: Отработка умения применять тригонометрические формулы для преобразования выражений, вычисления значений выражений.

Оснащение рабочего места

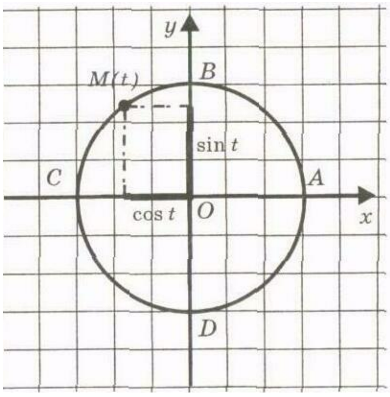
1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания;
2. Изучение теоретического материала по методической разработке;
3. Выполнение задания;
4. Ответы на вопросы.

Краткая теория:

Определение. Если точка M числовой окружности соответствует числу t, то абсциссу точки M называют **косинусом числа t** и обозначают cost, а ординату точки M называют **синусом числа t** и обозначают sint. (см. таблицу №1, таблицу №2, формулы, знаки тригонометрических функций). Если M(t) = M(x, y), то x= cost, y= sint.



Отсюда сразу следует, что

$-1 \le \sin t \le 1$, $-1 \le \cos t \le 1$.

Каждая точка числовой окружности имеет в системе *x0y* свои координаты

причем:

у точек первой четверти $x > 0, y > 0$;

у точек второй четверти $x < 0, y > 0$;

у точек третьей четверти $x < 0, y < 0$,

у точек четвертой четверти $x > 0, y < 0$.

Это позволяет нам составить соответствующую таблицу знаков синуса и косинуса по четвертям числовой окружности:

Мы отметили в § 18, что уравнение числовой окружности имеет вид

Четверть	1-я	2-я	3-я	4-я
Cos t	+	-	-	+
Sin t	+	+	-	-

Тем самым фактически получено важное равенство, связывающее cost и sint

$$\boxed{\cos^2 t + \sin\ t = 1}$$

Следует отметить, как важно научиться находить координаты точек числовой окружности, прежде всего тех, что представлены на первом и втором макетах. Теперь эта мысль стала, думается, предельно ясной: опираясь на таблицы 1 и 2 мы без труда составим соответствующие таблицы для вычисления значений cost и sint.

Таблица 1

T	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
cos t	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
sin t	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Таблица 2

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
cos t	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
sin t	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Связь тригонометрических функций одного аргумента.

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tg\alpha\ ctg=1$$

Задания для самостоятельной работы

Задание 1.

Определить значения остальных тригонометрических функций аргумента x, если дано:

1.1. $\sin x=\frac{4}{5}$, $0 < x < \frac{П}{2}$;

1.2. $\cos x = -\frac{12}{13}$, $\frac{П}{2} < x < п$;

1.3 $\cos x = -0.8$, $п < x < \frac{3П}{2}$;

1.4 $tqx = \frac{3}{4}$, $180^0 < x < 270^0$;

1.5. $ctqx = \sqrt{3}$, $270^0 < x < 370^0$;

Задание 2.

Упростить:

2.1. $\sin^4x + \sin^2x\cdot\cos^2x + \cos^2x$

2.2. $\sin^4x + \cos^4x - \sin^6x - \cos^6x$

2.3. $(tqx + ctqx)^2 - (tqx - ctqx)^2$

2.4. $\frac{1-cosx}{1-\sin x}$ + tqxctqx

2.5. $(\sin^4 x + \cos^4 x) : (\sin x + \cos x)\ \sin x\cos x$

Задание 3. Вычислить:

3.1. $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

3.2. $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\cos(-\pi)+\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

3.3. $2\sin 0+3\cos\frac{\pi}{2}-4\sin\frac{\pi}{2}$

3.4. $3\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+2\cos(-\pi)-5\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

Контрольные вопросы:

1. Что называется радианом?
2. Запишите формулы для перевода в радианную меру и наоборот.

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова

Практическая работа №10
Формулы суммы и разности тригонометрических функций

Цель: Формирование умения применять формулы суммы и разности тригонометрических функций для преобразования выражений, для вычисления значений выражений.

Оснащение рабочего места

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания;
2. Изучение теоретического материала по методической разработке;
3. Выполнение задания;
4. Ответы на вопросы.

Краткая теория:

Тригонометрические функции суммы и разности двух углов

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ (1) – *формула косинуса разности.*

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ (2) – *формула косинуса суммы.*

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ (3) – *формула синуса суммы.*

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ (4) – *формула синуса разности.*

Формулы (1)-(4) – формулы сложения для косинуса и синуса.

$tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$ **(5)** – *формула тангенса суммы.*

$tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$ ***(6)*** – *формула тангенса разности.*

Пример 1) *Упростить выражение* $\sin 3\alpha\cos 2\alpha+\cos 3\alpha\sin 2\alpha-\cos(2\pi-\alpha)$.

Решение. По формуле (3) получим

$$\sin 3\alpha\cos 2\alpha+\cos 3\alpha\sin 2\alpha-\cos(2\pi-\alpha)=\sin 5\alpha-\cos\alpha.$$

Ответ. $\sin 5\alpha-\cos\alpha$.

Пример 2)Упростить выражение $4\sin^2\alpha+5-4\cos^2\alpha$.

Решение. $4\sin^2\alpha+5-4\cos^2\alpha=4\sin^2\alpha-4\cos^2\alpha+5=4(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)+5=4\cos 2\alpha+5$.

Применили формулу (8). *Ответ.* $4\cos 2\alpha+5$.

Пример 3)*Найти значение выражения*

$$\sqrt{6}(\sin^2 x-\cos^2 x),\ \text{если}\ \sin 2x=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad -\frac{3\pi}{4}<x<-\frac{\pi}{2}.$$

Решение. $\sqrt{6}$ *(sin² x – cos² x)= –*$\sqrt{6}$ *cos 2 α.*

Найдем*cos 2 α.* *cos 2 α*=$-\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{3}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Значит, $\sqrt{6}(\sin^2 x-\cos^2 x)=-\sqrt{6}\cdot\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=2.$ *Ответ*. 2.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1.Разложите на множители выражение***:***

1. $\sin 3\alpha+\sin\alpha$
2. $\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{3\pi}{4}$
3. $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$
4. $\sin 40^0-\cos 40^0$
5. $\cos 18^0-\sin 22^0$
6. $tg\alpha+tg\beta$
7. $ctg2x+tg4x$
8. $tg\frac{5\pi}{8}-ctg\frac{\pi}{8}$
9. $\sin^2 x-\sin^2 y$
10. $\cos x-\sin y$
11. $\sin\alpha+\cos\alpha$
12. $\frac{\cos 2\alpha-\cos 4\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}$
13. $\frac{\sin\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 5\alpha}$

Задание 2.Найдите значение выражения:

1. $\frac{\cos 68^0-\cos 22^0}{\sin 68^0-\sin 22^0}$
2. $\frac{\sin 130^0+\sin 110^0}{\cos 130^0+\cos 110^0}$

Задание 3.Разложите на множители:

1. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x$
2. $\cos 2y-\cos 4y-\cos 6y+\cos 8y$
3. $\sin 87^0-\sin 59^0-\sin 93^0+\sin 61^0$
4. $\cos 115^0-\cos 35^0+\cos 65^0+\cos 25^0$
5. $\cos 85^0+\cos 35^0-\cos 25^0$

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулы сложения
2. Вычислите cos 2100.
3. Чему равен период функции y=tgx; y = ctgx?

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова

Практическая работа №11
Решение простейших тригонометрических уравнений

Цель работы: отработка понятия тригонометрического уравнения, простейшеготригонометрического уравнения, формулдля решения простейших тригонометрических уравнений, научиться находить значения корня тригонометрического уравнения на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства.

Оснащение рабочего места:

1. Настоящая методическая разработка.
2. Учебная литература.
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания.
2. Изучение теоретического материала по методической разработке.
3. Выполнение заданий.
4. Ответы на вопросы.

Краткая теория.

Уравнение содержащее неизвестное под знаком тригонометрической функции называется тригонометрическим.

1. $Sin\,x = a, \quad x = (-1)^n \, arcsin\, a + \pi n, n \in Z,$ где$|a| \leq 1$

Частный случай:

$Sinx = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z,$

$Sin\,x = 0, \quad x = \pi n, n \in Z,$

$Sin\,x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z,$

2. $\mathrm{Cos\,x = a, \quad x = \pm arccos\,a + 2\pi n, n \in Z,}$ где$|\mathrm{a}| \leq 1$

Частный случай:

$Cosx = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, n \in Z,$

$Cos\,x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z,$

$Cosx = 1, \quad x = 2\pi n, n \in Z,$

3. $tg\,x = a, \quad x = arctg\,a + \pi n, n \in Z, \; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$

Пример 1. Решить уравнение:

$$Sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Решение. Это частный случай и поэтому

$\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z,$

Выразим из полученного равенства

$\frac{x}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$, *или* $\frac{x}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$

Окончательно $x = \pi + 8\pi n, n \in Z$

Ответ: $x = \pi + 8\pi n, n \in Z$

Пример 2. Решить уравнение:

$$2Cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sqrt{3} = 0$$

Решение. $2Cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\sqrt{3}$

$Cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, *учитывая четность косинуса, получим*

$Cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $x - \frac{\pi}{4} = \pm arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z,$

$x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$ *или* $x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

Пример 3. Решить уравнение: *Sin3xCos2x + Cos3xSin2x = 0.5*

Решение. *Sin3xCos2x + Cos3xSin2x = 0.5*

Sin(3x-2x) =0.5

$Sin\, x = \frac{1}{2}$

$x = (-1)^n arcsin\frac{1}{2} + \pi n, n \in Z.$

$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z,$

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z,$

При решении простейших тригонометрических уравнений чаще всего используются два метода: <u>введение новой переменной и разложение на множители</u>.

Пример 4. Решить уравнение: $tg\frac{x}{2} + 3ctg\frac{x}{2} = 4$

Решение. Поскольку $ctg\frac{x}{2} = \frac{1}{tg\frac{x}{2}}$, *есть смысл ввести новую переменную* $z = tg\frac{x}{2}$. *Это позволит переписать уравнение в более простом виде*

$z + \frac{3}{z} = 4.$

$z^2 + 3 = 4z$

$z^2 - 4z + 3 = 0$

$z_1 = 1, \qquad z_2 = 3$

Возвращаясь к переменной x получим два уравнения

$tg\frac{x}{2} = 1$ *или* $tg\frac{x}{2} = 3$

Из первого уравнения находим

$\frac{x}{2} = arctg\,1 + \pi n, n \in Z,$ *то есть* $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$

Из второго уравнения находим

$\frac{x}{2} = arctg\,3 + \pi n, n \in Z.$

$\frac{x}{2} = arctg\,3 + \pi n, n \in Z,$ *то есть* $x = 2arctg\,3 + 2\pi n, n \in Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, \; x = 2arctg\,3 + 2\pi n, n \in Z$

Пример 5. Решить уравнение: 2SinxCos5x – Cos5x = 0

Решение. $Cos5x(2Sinx - 1) = 0$

$Cos5x = 0$ *или* $2Sinx - 1 = 0$

Из первого уравнения находим

$5x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, n \in Z,$

Из второго уравнения находим $Sin\, x = \frac{1}{2}$

$x = (-1)^n \, arcsin\frac{1}{2} + \pi n, n \in Z.$

$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z,$

Ответ: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, n \in Z, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z,$

Задания для самостоятельной работы

1 вариант

Решить уравнение

1) $Cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$
2) $Sin\, x\, (2\, Cos\, x + 1) = 0$
3) $(Cos\, x - 1)(Cos\, x + 1) = 0$
4) $2tg^2\, x + 3tgx = 0$
5) $sin^2\, x - sin\, x = 0$
6) $sin^2\, 2x - cos^2\, 2x = 1$
7) $2\, sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{3}\right) = \sqrt{3}$

2 вариант

Решить уравнение

1) $Sin\, \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$
2) $Cosx(2Sin\, x + 1) = 0$
3) $(2Sin\, x - \sqrt{2})(2Cos\, x + 1) = 0$
4) $tg^2\, x - 6tgx + 5 = 0$
5) $2Cos^2\, x - Cos\, x = 0$
5) $sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} = 0.5$
7) $2\, cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sqrt{3} = 0$

Контрольные вопросы:

1) Сформулируйте определение арксинуса, арккосинуса, арктангенса. Для каких чисел они определены?
2) Запишите решение уравнения .ctgx = a

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л.Математика.- М, 2014
3. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова

Практическая работа №12

Решение тригонометрических уравнений

Цель повторить основные типы тригонометрических уравнений, наиболее типичные приёмы и методы их решения, систематизировать знания по данной теме.

Оснащение рабочего места:

1. Настоящая методическая разработка.
2. Учебная литература.
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания.
2. Изучение теоретического материала по методической разработке.
3. Выполнение заданий.
4. Ответы на вопросы.

Краткая теория.

Основные методы решения

Любое тригонометрическое уравнение в процессе решения с помощью надлежащих преобразований должно быть приведено к простейшим. Наиболее часто при решении тригонометрических уравнений применяются следующие методы:

- разложение на множители;
- способ замены (сведение к алгебраическим уравнениям);
- сведение к уравнениям, однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$;
- преобразование суммы тригонометрических функций в произведение;
- преобразование произведения тригонометрических функций в сумму;
- использование формул понижения степени;
- равенство одноименных тригонометрических функций;
- равенство одноименных тригонометрических функций
- введение вспомогательного аргумента.

При этом, как правило, в процессе решения тригонометрического уравнения приходится использовать не один, а несколько из указанных выше методов.

1. *Способ замены*

Данным методом решаются уравнения вида $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0,\ a\cos^2 x + b\cos x + c = 0\ (a \neq 0)$, $atg^2 x + btgx + c = 0,\ actg^2 x + bctgx + c = 0$. Они сводятся к простейшим тригонометрическим уравнениям с помощью замены $\sin x = t$ или $\cos x = t$. Уравнения $a\sin^2 x + b\cos x + c = 0,\ a\cos^2 x + b\sin x + c = 0$ не являются с виду алгебраическими, но их можно свести к алгебраическим: $a\cos^2 x - b\cos x - (a + c) = 0,\ a\sin^2 x - b\sin x - (a + c) = 0$.

При решении уравнений этим методом необходимо знать формулы:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad tgx = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad ctgx \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$ctgx = \frac{1}{tgx}; \quad 1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad 1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x};$$

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x; \ 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x;$$

$$tg2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}; \quad \sin 2x = \frac{2tgx}{1 + tg^2 x};$$

$$\cos 2x = \frac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x}; \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x;$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

Пример 1. Решить уравнение $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$.

Решение. *Это уравнение является квадратным относительно* $\cos x$. *Поэтому сделаем замену* $\cos x = t$. *В результате получим уравнение* $t^2 + t - 2 = 0$. *Его корни:* $t_1 = 1,\ t_2 = -2$, *то есть получаем уравнение* $\cos x = 1$ *или* $\cos x = -2$. *Первое уравнение дает* $x = 2\pi k,\ k \in Z$. *Второе уравнение не имеет корней.*

Ответ: $x = 2\pi k,\ k \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$.

Решение. *Так как* $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, *то уравнение можно представить в виде* $6\left(1 - \sin^2 x\right) + 5\sin x - 7 = 0$; $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$. *Сделаем замену* $t = \sin x$. *Получим квадратное уравнение* $6t^2 - 5t + 1 = 0$, *решая которое, имеем:* $D = 25 - 6 \cdot 4 = 1,\ t_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12}$ *,то есть* $t_1 = \frac{1}{2},\ t_2 = \frac{1}{3}$. *Таким образом, получим два простейших уравнения* $\sin x = \frac{1}{2}$ *или* $\sin x = \frac{1}{3}$. *Решая их, имеем* $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z$ *или* $x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k,\ \ k \in Z$.

Ответ: $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k;\ (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k,\ \ k \in Z$

Однородные уравнения

Уравнения: $a_0 \sin x + a_1 \cos x = 0$, $a_0 \sin^2 x + a_1 \sin x \cos x + a_2 \cos^2 x = 0$,

$$a_0 \sin^3 x + a_1 \sin^2 x \cos x + a_2 \sin x \cos^2 x + a_3 \cos^3 x = 0,$$

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cos^2 x + \ldots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0$$

называются *однородными относительно* $\sin x$ и $\cos x$. Они обладают тем свойством, что сумма показаний степеней при $\sin x$ и $\cos x$ у всех членов уравнения одинакова. Делением на $\cos x,\ \cos^2 x, \dots, \cos^n x$ соответственно уравнения приводятся к алгебраическим уравнениям относительно tgx. При этом, конечно, предполагается, что коэффициент $a_0 \neq 0$. В результате получаем равносильное уравнение, так как разделили на $\cos x \neq 0$ (если бы $\cos x = 0$, то из исходного уравнения следует, что и $\sin x = 0$, а это невозможно, так как $\sin x$ и $\cos x$ при одном и том же значении x в нуль не обращаются, ибо всегда $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

Уравнение $a_0 \sin^2 x + a_1 \sin x \cos x + a_2 \cos^2 x = b$ легко сводится к однородному, если правую часть представить в виде $b = b \cdot 1 = b(\sin^2 x + \cos^2 x)$. После очевидных преобразований получаем $(a_0 - b)\sin^2 x + a_1 \sin x \cos x + (a_2 - b)\cos^2 x = 0$.

Пример 3. Решить уравнение: $3\sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$.

Решение. *Это уравнение является однородным относительно* $\sin x$ *и* $\cos x$. *Поэтому, разделив его на* $\cos^2 x$ $(\cos x \neq 0)$, *получим* $3tg^2 x - 2tgx - 1 = 0$. *Введем новую переменную* $tgx = t$ *и решим квадратное уравнение* $3t^2 - 2t - 1 = 0$.

Его корни $t_1 = 1,\ t_2 = -\frac{1}{3}$. *Получили два простейших тригонометрических уравнения* $tgx = 1,\ tgx = -\frac{1}{3}$. *Решая их, найдем:* $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$ *или* $x = -arctg\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k;\quad -arctg\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Пример 4 Решить уравнение: $6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$.

Решение. *Это уравнение, сводящееся к однородному. Имеем*

$$6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x),$$
$$4\sin^2 x + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0,$$

то есть получили однородное уравнение. Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$ $(\cos x \neq 0)$, *получим* $4tg^2 x + tgx - 3 = 0$. *Решая это уравнение, квадратное относительно* tgx, *найдем, что* $tgx = -1$ *либо* $tgx = \frac{3}{4}$. *Таким образом,* $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$ *или* $x = arctg\frac{3}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k,\ arctg\frac{3}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

Разложение на множители

При решении уравнений этим методом нужно пользоваться известными способами разложения на множители алгебраических выражений. Необходимо также знать уже приведенные формулы и дополнительно:

$$tg(x \pm y) = \frac{tgx \pm tgy}{1 \mp tgxtgy}; \qquad \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x;$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

Пример 5. Решить уравнение $\sin 2x - \cos x = 0$.

Решение. *Применяя формулу синуса двойного угла, получим* $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, $\cos x(2\sin x - 1) = 0$. *Полученное уравнение равносильно совокупности уравнений:* $\cos x = 0$, $2\sin x - 1 = 0$

Решение 1-го уравнения: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

Уравнение $2\sin x - 1 = 0$ *преобразуем к виду* $\sin x = \dfrac{1}{2}$, *имеющему решение* $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z$.

Пример 6. Решить уравнение $\sin x + \cos x = \sin x \cos x + 1$.

Решение. *Перенесем все члены уравнения в левую часть и разложим ее на множители:*

$$\sin x + \cos x - \sin x \cos x - 1 = 0,$$

$$\sin x(1 - \cos x) - (1 - \cos x) = 0,$$

$$(\sin x - 1)(1 - \cos x) = 0.$$

Отсюда следует, что $\sin x - 1 = 0$ *или* $1 - \cos x = 0$, *то есть имеем уравнение* $\sin x = 1$ *или* $\cos x = 1$. *Решая их, получим* $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ *или* $x = 2\pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ 2\pi k,\ k \in Z$.

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

Пример 7 . Решить уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)-\sin 2x=0$.

Решение. *По формулам приведения* $\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\sin 3x$. *Получаем уравнение* $\sin 3x-\sin 2x=0$. *Пользуясь, выше приведенной формулой, преобразуем разность синусов в произведение:*

$$\sin 3x-\sin 2x=2\sin\frac{3x-2x}{2}\cos\frac{3x+2x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}.$$

В результате имеем уравнение $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}=0$, *откуда* $\sin\frac{x}{2}=0$ *или* $\cos\frac{5x}{2}=0$. *Решая эти уравнения, получим* $x=2\pi k,\ k\in Z$; $x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}k,\ k\in Z$.

Ответ: $2\pi k,\ \frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}k,\ k\in Z$.

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

Пример8 . Решить уравнение $\sin 2x\sin 6x=\cos x\cos 3x$.

Решение. *Преобразуем по выше приведенным формулам левую и правую части уравнения. В результате получим:*

$$\frac{1}{2}\left[\cos(2x-6x)-\cos(2x+6x)\right]=\frac{1}{2}\left[\cos(x-3x)+\cos(x+3x)\right],$$

иначе $\cos 4x-\cos 8x=\cos 2x+\cos 4x$, *то есть* $\cos 8x+\cos 2x=0$. *Преобразовывая теперь в произведение сумму косинусов, будем иметь* $2\cos 5x\cos 3x=0$, *откуда* $\cos 5x=0,\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5},\ k\in Z$ *или* $\cos 3x=0,\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5},\ \frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z$.

Использование формул понижения степени

При решение уравнений данным способом необходимо знать формулы:

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2},\quad 1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Пример9 . Решить уравнение:

$$\cos^2 3x+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)=\cos^2 7x+\cos^2 9x+\cos\frac{3\pi}{2}.$$

Решение. *Сразу заметим, что* $\cos\frac{3\pi}{2}=0$*, а* $\sin\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)=\cos 5x$*, и уравнение принимает вид* $\cos^2 3x+\cos 5x=\cos^2 7x+\cos^2 9x$*. Используя, выше приведенные формулы, перепишем его в виде*

$$\frac{1}{2}(1+\cos 6x)+\frac{1}{2}(1+\cos 10x)=\frac{1}{2}(1+\cos 14x)+\frac{1}{2}(1+\cos 18x),$$

то есть $\cos 6x+\cos 10x=\cos 14x+\cos 18x$*. Преобразуем суммы косинусов в произведения, тогда получим*

$$2\cos 8x\cos 2x=2\cos 16x\cos 2x,$$
$$\cos 2x(\cos 16x-\cos 8x)=0.$$

Наконец, преобразовывая разность косинусов в произведение, получим $-2\sin 4x\sin 12\cos 2x=0$*. Задача свелась к решению совокупности трех уравнений:* $\sin 4x=0$ *или* $\sin 12x=0$ *или* $\cos 2x=0$*, из которой находим три семейства решений заданного уравнения:* $x=\frac{\pi k}{4},\ x=\frac{\pi n}{12},\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi l}{2},\ k,n,l\in Z$*. Однако ответ можно записать в виде* $x=\frac{\pi n}{12},\ n\in Z$*, поскольку он содержит в себе два других семейства (чтобы убедиться в этом, достаточно положить* $n=3k$ *или* $n=6l+3$*).*

Ответ: $\frac{\pi n}{12},\ n\in Z$.

Пример 10. Решить уравнение $3\sin x+4\cos x=3$.

Решение. $a=3,\ b=4,\ c=3,\ a^2+b^2>c^2$ *- уравнение имеет решение.*

$$3\frac{2t}{1+t^2}+4\frac{1-t^2}{1+t^2}=3\ \Rightarrow\ 7t^2-6t-1=0,\ t_{1,2}=\frac{3\pm 4}{7}.$$

1) $t_1=1,\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+n\pi,\ x=\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ n\in Z$*;*

2) $t_2=-\frac{1}{7},\ \frac{x}{2}=-arctg\frac{1}{7}+n\pi,\ x=-2arctg\frac{1}{7}+2n\pi,\ n\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ x=-2arctg\frac{1}{7}+2n\pi,\ n\in Z$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $2\sin x - 1 = 0$;

б) $6\sin^2 x - 5\cos x + 5 = 0$;

в) $2tg^2x + 3\,tgx = 0$

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $2\cos x - \sqrt{2} = 0$;

б) $\cos^2 x + 2\sin x + 2 = 0$;

в) $tg^2x - tgx = 0$.

Решите уравнения (164—168).

164. а) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; б) $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$;
в) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; г) $4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0$.

165. а) $6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; б) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$;
в) $4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0$; г) $5\sin^2 x + 6\cos x - 6 = 0$.

166. а) $2\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$; б) $\cos^2 x + 3\sin x = 3$;
в) $4\cos x = 4 - \sin^2 x$; г) $8\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$.

167.— а) $3\,\mathrm{tg}^2 x + 2\,\mathrm{tg}\,x - 1 = 0$; б) $\mathrm{tg}\,x - 2\,\mathrm{ctg}\,x + 1 = 0$;
в) $2\,\mathrm{tg}^2 x + 3\,\mathrm{tg}\,x - 2 = 0$; г) $2\,\mathrm{ctg}\,x - 3\,\mathrm{tg}\,x + 5 = 0$.

168.— а) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$; б) $4\cos^2 x - 3 = 0$;
в) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\,x = 0$; г) $4\sin^2 x - 1 = 0$.

Решите уравнения (169—174).

169.— а) $3\sin^2 x + \sin x\cos x = 2\cos^2 x$;
б) $2\cos^2 x - 3\sin x\cos x + \sin^2 x = 0$;
в) $9\sin x\cos x - 7\cos^2 x = 2\sin^2 x$;
г) $2\sin^2 x - \sin x\cos x = \cos^2 x$.

170.— а) $4\sin^2 x - \sin 2x = 3$; б) $\cos 2x = 2\cos x - 1$;
в) $\sin 2x - \cos x = 0$; г) $\sin 2x + 4\cos^2 x = 1$.

171.— а) $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin 2x$; б) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x - \sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,x = 2$;
в) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$; г) $\mathrm{tg}\,x = 3\,\mathrm{ctg}\,x$.

172.— а) $\sin 2x + 2\cos 2x = 1$; б) $\sin^4 \frac{x}{4} - \cos^4 \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$;
в) $3\sin 2x + \cos 2x = 2\cos^2 x$; г) $1 - \cos x = 2\sin \frac{x}{2}$.

173.— а) $\sin 4x + \sin^2 2x = 0$; б) $\frac{3}{5\,\mathrm{tg}\,x + 8} = 1$;
в) $\frac{5}{3\sin x + 4} = 2$; г) $1 - \sin 2x = \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2$.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение арксинуса, арккосинуса, арктангенса. Для каких чисел они определены?
2. Запишите решение уравнения .ctgx=a

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова

Практическая работа № 13

Решение простейших тригонометрических неравенств.

Цель работы: знатьспособы решения простейших тригонометрических неравенств, уметьрешать простейшие тригонометрические неравенства с помощью тригонометрического круга или графиков тригонометрических функций.

Оснащение рабочего места:

1. Настоящая методическая разработка.
2. Учебная литература.
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания.
2. Изучение теоретического материала по методической разработке.
3. Выполнение заданий.
4. Ответы на вопросы.

Краткая теория.

Пример 1. Решить неравенство:

$$Sin\, x \leq -\frac{1}{2}$$

Решение. все точки единичной окружности при значениях x удовлетворяющих данному неравенству, имеют ординату, меньшую или равную $-\frac{1}{2}$.

Множество всех таких точек – дуга от $\frac{7\pi}{6}$ до $\frac{11\pi}{6}$.

Таким образом решение неравенства запишем в виде $\frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}$

Вследствие периодичности синуса остальные решения получаются добавлением к найденным решениям $2\pi n$. *То есть* $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{11\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

Ответ: $x \in \left[\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \,;\, \frac{11\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z\right]$

Задания для самостоятельной работы

1 вариант

Решить неравенство:

1) $\mathrm{Sinx} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\mathrm{Cosx} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\mathrm{tgx} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$4)

5) $2\mathrm{Sinx} + \sqrt{2} \geq 0$

6) $\mathrm{Sin}\,2\mathrm{x} < \frac{1}{2}$

7) $2\,\mathrm{Cos}\left(2\mathrm{x} + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$

8) $\mathrm{Sin}\,\mathrm{xCos}\frac{\pi}{6} - \mathrm{CosxSin}\frac{\pi}{6} < \frac{1}{2}$

2 вариант

Решить неравенство:

1) $\mathrm{Sinx} < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\mathrm{Cosx} \geq -\frac{1}{2}$

3) $\mathrm{tgx} \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}$4)

5) $2\mathrm{Cosx} - \sqrt{3} \leq 0$

6) $\mathrm{Cos}\frac{\mathrm{x}}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}$

7) $\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\mathrm{x}}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$

8) $\mathrm{Sin}\frac{\pi}{4}\mathrm{Cosx} + \mathrm{Cos}\frac{\pi}{4}\mathrm{Sinx} < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Контрольные вопросы:

1. Может ли синус угла α быть равным 2?
2. Выразите в радианах 180°, 270°, 90°, 10°.

Литература:

1. Колмогоров, А.Н. Алгебра и начала анализа [Текст]: Учебник для 10-11 кл. общеобразоват.учреждений.
2. Дадаян, А. А. Математика [Текст]: учеб. для студентов учреждений сред. проф. образования.
3. А.Г. Мордкович Алгебра и начала анализа [Текст]: Учебник для 10-11 кл. общеобразоват.учреждений

Практическая работа №14

Построение графиков элементарных функций

Цель работы: построение графиков элементарных функций

Оснащение рабочего места:

1. Настоящая методическая разработка.
2. Учебная литература.
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания.
2. Изучение теоретического материала по методической разработке.
3. Выполнение заданий.
4. Ответы на вопросы.

Краткая теория.

Графики и основные свойства элементарных функций

1. ***График линейной функции***

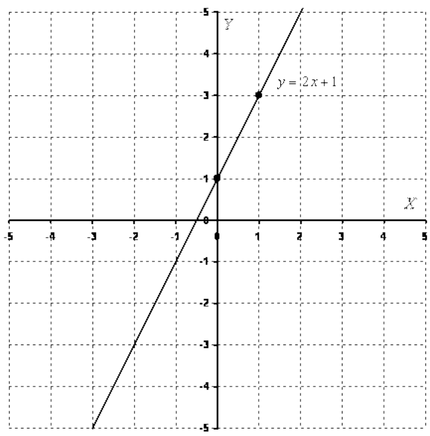
Линейная функция задается уравнением $y = ax + b$. График линейной функций представляет собой прямую. Для того, чтобы построить прямую достаточно знать две точки.

<u>*Пример 1.*</u> Построить график функции $y = 2x + 1$. Найдем две точки. В качестве одной из точек выгодно выбрать ноль.Если $x = 0$, то $y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$Берем еще какую-нибудь точку, например, 1.Если $x = 1$, то $y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

При оформлении заданий координаты точек обычно сводятся в таблицу:

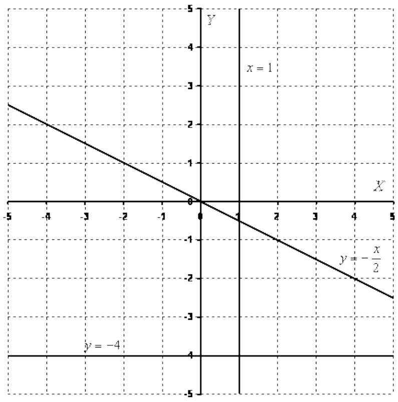
x	0	1
y	1	3

Две точки найдены, выполним чертеж:



При оформлении чертежа всегда подписываем графики.

Частные случаи линейной функции:

1) 

Линейная функция вида $y = ax$ ($a \neq 0$) называется прямой пропорциональностью. Например, $y = -\frac{x}{2}$. График прямой пропорциональности всегда проходит через начало координат. Таким образом, построение прямой упрощается – достаточно найти всего одну точку.

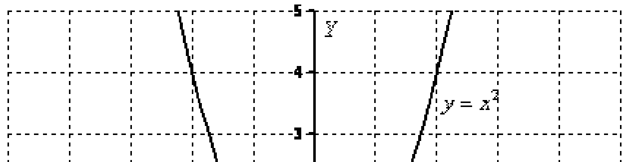
2) Уравнение вида $y = b$ задает прямую, параллельную оси OX, в частности, сама ось OX задается уравнением $y = 0$. График функции строится сразу, без нахождения всяких точек. То есть, запись $y = -4$ следует понимать так: «игрек всегда равен –4, при любом значении икс».

3) Уравнение вида $x = b$ задает прямую, параллельную оси OY, в частности, сама ось OY задается уравнением $x = 0$. График функции также строится сразу. Запись $x = 1$ следует понимать так: «икс всегда, при любом значении игрек, равен 1».

2. ***График квадратичной функции***

Парабола. График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) представляет собой параболу.

*Пример 2*Рассмотрим случай: $y = x^2$



Функция $y = x^2$ является чётной. Если функция является чётной, то ее график симметричен относительно оси OY. Это очень полезное свойство, которое заметно упрощает построение графика, в чём мы скоро убедимся. Аналитически чётность функции выражается условием $f(-x) = f(x)$. Как проверить любую функцию на чётность? Нужно вместо x подставить в уравнение $-x$. В случае с параболой проверка выглядит так: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, значит, функция $y = x^2$ является четной.

<u>*Пример 2*</u>

Построить график функции $f(x) = -x^2 + 2x$.
Алгоритм построения.

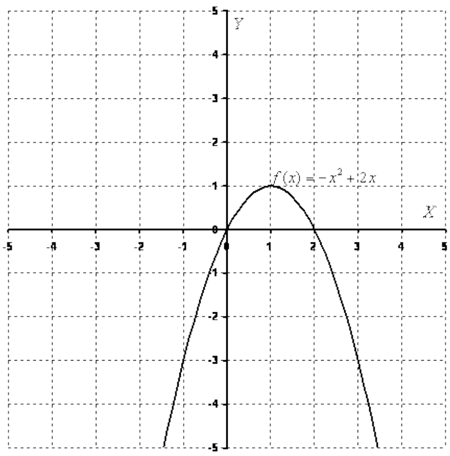
- Сначала находим вершину параболы. $(x = \frac{-b}{2a})$

$x = 1$ – именно в этой точке и находится вершина параболы, рассчитываем соответствующее значение «игрек»: $f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$

Таким образом, вершина находится в точке $(1; 1)$

Теперь находим другие точки, при этом пользуемся симметричностью параболы.

x	1	0	2	-1	3	-2	4
y	1	0	0	-3	-3	-8	-8



Из рассмотренных графиков вспоминается еще один полезный признак:

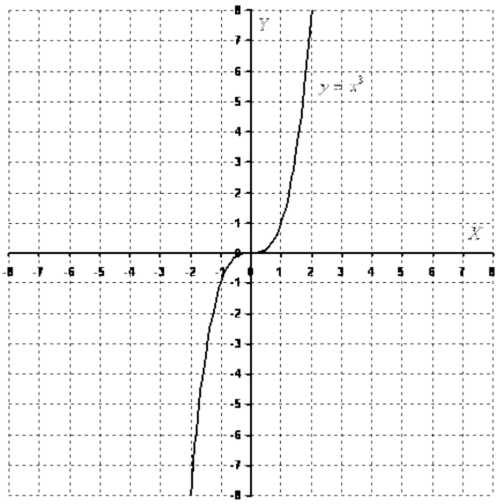
Для квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ справедливо следующее:

Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх.

Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

3. ***Кубическая парабола***

Кубическая парабола задается функцией $y = x^3$.

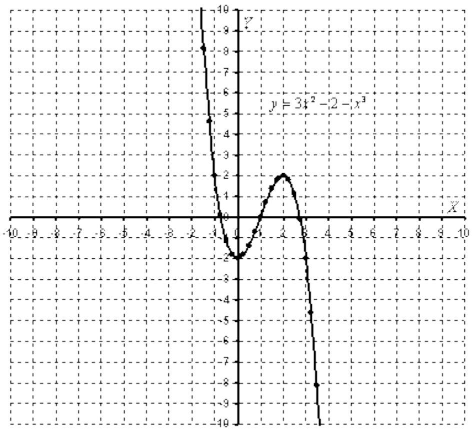


Перечислим основные свойства функции $y = x^3$
<u>Область определения</u> – любое действительное число: $D(f) = \Re$.
Область значений – любое действительное число: $E(f) = \Re$.

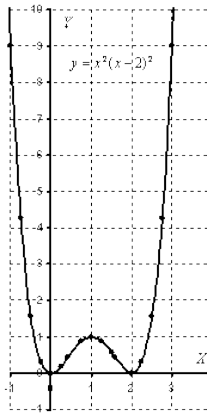
Функция $y = x^3$ является нечётной. Если функция является нечётной, то ее график симметричен относительно начала координат. Аналитически нечётность функции выражается условием $f(-x) = -f(x)$. Выполним проверку для кубической функции, для этого вместо «икс» подставим «минус икс»:
$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -(x^3) = -f(x)$, значит, функция $y = x^3$ является нечетной.

x	0	1	-1	2	-2
y	0	1	-1	8	-8

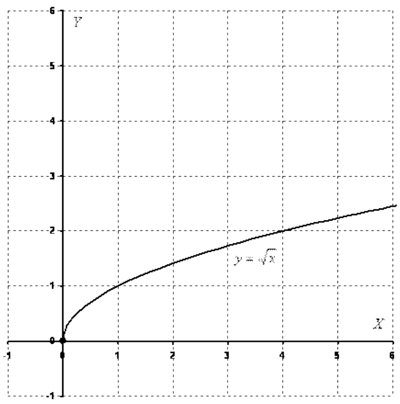
4. *График любого многочлена третьей степени* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *принципиально имеет следующий вид*



5. *Многочлены 4-ой, 6-ой и других четных степеней имеют график принципиально следующего вида:*



6. ***График функции*** $y = \sqrt{x}$

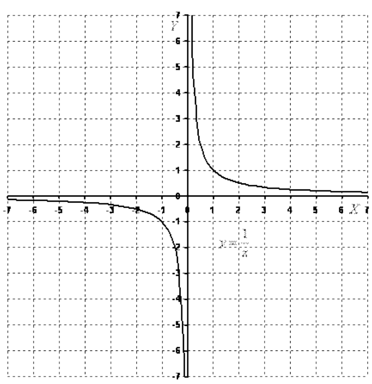


При построении простейших графиков с корнями также уместен поточечный способ построения, при этом выгодно подбирать такие значения «икс», чтобы корень извлекался нацело:

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

7. ***График гиперболы*** $y = \dfrac{1}{x}$

x	1	2	3	6
y	6	3	2	1



Задания для самостоятельной работы.

1. В одной и той же системе координат постройте графики функций:

а) $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x} + 2$, $y = \frac{1}{x-2}$;

б) $y = \cos x$, $y = \cos x - 3$, $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $y = -x^2$, $y = 4 - x^2$, $y = -(x-2)^2$;

г) $y = \sin x$, $y = \sin x + 2$, $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

2. а) $y = \frac{1}{x-3}$; б) $y = (x-2)^2 - 4$;

в) $y = 1 - (x+2)^2$; г) $y = 2 + \frac{1}{x}$.

Контрольные вопросы:

1) Что такое числовая функция, ее область определения, область значений?

2) Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{3x+1}{x^2 - 7x + 12}$; б) $y = \frac{1}{\sin x}$;

в) $y = \sqrt{4 - x^2}$; г) $y = \frac{1}{\cos x}$.

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова

Практическая работа №15
Решение рациональных уравнений и неравенств

Цель: научиться решать рациональные уравнения.

Оснащение рабочего места

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания;
2. Изучение теоретического материала по методической разработке;
3. Выполнение задания;
4. Ответы на вопросы.

Краткая теория

Схема решения дробного рационального уравнения

1. Найти общий знаменатель всех дробей, которые входят в уравнение.
2. Умножить обе части уравнения на общий знаменатель.
3. Решить полученное целое уравнение.
4. Произвести проверку корней, и исключить те из них, которые обращают в нуль общий знаменатель.

Так как мы решаем дробные рациональные уравнения, то в знаменателях дробей будут переменные. Значит, будут они и в общем знаменателе. А во втором пункте алгоритма мы умножаем на общий знаменатель, то могут появится посторонние корни. При которых общий знаменатель будет равен нулю, а значит и умножение на него будет бессмысленным. Поэтому в конце обязательно делать проверку полученных корней.

Рассмотрим пример:

Решить дробное рациональное уравнение: (x-3)/(x-5) + 1/x = (x+5)/(x(x-5)).*

Будем придерживаться общей схемы: найдем сначала общий знаменатель всех дробей. Получим x(x-5).*

Умножим каждую дробь на общий знаменатель и запишем полученное целое уравнение.

*(x-3)/(x-5) * (x*(x-5))= x*(x+3);*
*1/x * (x*(x-5)) = (x-5);*
(x+5)/(x(x-5)) * (x*(x-5)) = (x+5);*
x(x+3) + (x-5) = (x+5);*

Упростим полученное уравнение. Получим:

$x^2+3*x + x-5 – x - 5 =0;$
$x^2+3*x-10=0;$

Получили простое приведенное квадратное уравнение. Решаем его любым из известных способов, получаем корни x=-2 и x=5.

Теперь производим проверку полученных решений:

Подставляем числа -2 и 5 в общий знаменатель. При x=-2 общий знаменатель x(x-5) не обращается в нуль, -2*(-2-5)=14. Значит число -2 будет являться корнем исходного дробного рационального уравнения.*

При x=5 общий знаменатель x(x-5) становится равным нулю. Следовательно, это число не является корнем исходного дробного рационального уравнения, так как там будет деление на нуль.*

Ответ: x=-2.

Задания для самостоятельной работы.

Вариант 1

А1. Укажите значения m, при которых равно нулю значение дроби $\frac{m^2+m-6}{m^2-16}$.

1) -3 и -2
2) 2 и 3
3) -3 и 2
4) -2 и 3

А2. Найдите корни уравнения $\frac{x^2}{x^2-x-6}=\frac{7x+10}{6+x-x^2}$.

1) -5 и -2
2) -5
3) -2
4) 2 и 5

А3. Найдите сумму всех значений x, при которых значение дроби $\frac{x^2+2x-3}{x^2+5x-1}$ равно -1.

1) -2
2) 2
3) 3,5
4) $-3,5$

В1. Решите уравнение $\frac{1}{x+3}+\frac{3}{x-1}=\frac{x^2+5x+2}{x^2+2x-3}$.

С1. Решите уравнение $\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2-15=16\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^2$.

Контрольные вопросы

1) Какое уравнение с одной переменной называется целым?
2) Как найти степень целого уравнения?
3) Дайте определение биквадратного уравнения. Объясните, как решают биквадратные уравнения?
4) Какое уравнение называется дробным рациональным?

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова

Практическая работа № 16
Решение иррациональных уравнений

Цель: научиться решать иррациональные уравнения.

Оснащение рабочего места

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания;
2. Изучение теоретического материала по методической разработке;
3. Выполнение задания;
4. Ответы на вопросы.

Краткая теория

Иррациональными *называют уравнения, в которых неизвестная величина находится под знаком корня определенного степени.* Простейшие иррациональные уравнения решаются или подъемом в степень или заменой.

Стоит отметить, что при решении иррациональных уравнений необходимо определять область допустимых значений. Кроме того следует производить проверку, подставляя найденные значения неизвестных в исходное уравнение, поскольку при возведении в степень мы увеличиваем степень уравнения, что может привести к появлению посторонних корней.

Перейдем к вычислениям.

Пример 1. Найти решение уравнения $\sqrt{3x+7}=4.$

Решение:

Находим область допустимых значений $\sqrt{3x+7}\geq 0 \Rightarrow x\geq -\frac{7}{3}.$

Подносим обе части уравнения в квадрат и решаем

$3x+7=16;$

$3x=16-7=9\Rightarrow x=3.$

Получили решение *x=3*.

Пример 2. Найти решение уравнения $\sqrt{1-\frac{5x}{6}}=\frac{2}{3}.$

Решение:

ОДЗ для уравнения

$\sqrt{1-\frac{5x}{6}}\geq 0\Rightarrow 1-\frac{5x}{6}\geq 0\Rightarrow x\leq\frac{6}{5};$

$x\in\left(-\infty;\frac{6}{5}\right].$

Раскрываем иррациональность уравнения и находим

$$1-\frac{5x}{6}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9};$$

$$\frac{5x}{6}=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}\Rightarrow 5x=\frac{5\cdot 6}{9}\Rightarrow x=\frac{2}{3}.$$

Он принадлежит области допустимых значений , то есть - является решением.

<u>Пример 3.</u> *Решить уравнение* $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$

Решение:*Находим область допустимых значений*

$$\begin{cases}\sqrt{x-3}\ge 0;\\ \sqrt{2x+1}\ge 0;\Rightarrow x\ge 3.\\ \sqrt{x}\ge 0\end{cases}$$

ОДЗ: $x\in[3;\infty)$

По описанной схеме возводим обе части в квадрат, чтобы избавиться иррациональности

$$2x+1+x-3+2\sqrt{2x+1}\sqrt{x-3}=4x.$$

Переносим все слагаемые кроме корней в правую часть и упрощаем

$$2\sqrt{2x+1}\sqrt{x-3}=4x-3x+2=x+2.$$

Для раскрытия иррациональности снова выполняем возведения в квадрат и упрощение

$$4(2x+1)(x-3)=x^2+4x+4;$$

$$4\left(2x^2+5x-3\right)=x^2+4x+4;$$

$$8x^2-20x-12-x^2-4x-4=0;$$

$$7x^2-24x-16=0.$$

Получили квадратное уравнение, корни которого находим с помощью дискриминанта

$$D=24^2-4\cdot 7\cdot(-16)=1024=32^2;$$

$$x_{1,2}=\frac{24\pm 32}{2\cdot 7}\Rightarrow$$

$$x_1=\frac{56}{14}=4;\ x_2=-\frac{8}{14}=-\frac{1}{7}.$$

Второй корень не принадлежит области допустимых значений. Эту проверку следует выполнять всегда, иначе получите больше корней чем нужно, причем они не удовлетворяют исходное уравнение.

Итак, решением будет значение x=4.

Пример 4. *Решить уравнение* $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1.$

Решение:

Область допустимых значений для данного уравнения в простой способ найти не удастся , поэтому выполним решение после чего проверим подстановкой полученные корни.

Подносим обе части уравнения в квадрат

$$1+x\sqrt{x^2+24}=x^2+2x+1;$$

$$x\sqrt{x^2+24}=x(x+2).$$

Данное выражение большинство из Вас упростило бы на х и подносило к квадрату. Но это было бы неправильно.
На х делить можно когда он принимает ненулевое значение. В данном случаех=0 будет решением уравнения , в чем легко убедится

$$\sqrt{1+0}=0+1.$$

После того, как мы это учли можно продолжать вычисления

$$\sqrt{x^2+24}=(x+2);$$

$$x^2+24=x^2+4x+4;$$

$$4x=24-4=20\Rightarrow x=5.$$

Выполняем проверку

$$\sqrt{1+5\sqrt{25+24}}=\sqrt{1+35}=6=5+1=6.$$

Получили два корня уравнения х=0, х=6.

Пример 5. *Найти решение уравнения*

$$\left(\frac{x+5}{x}\right)^{0,5}+4\left(\frac{x}{x+5}\right)^{0,5}=4.$$

Решение:

Преподносить к квадрату обе стороны в подобных уравнениях не нужно. Для упрощения делаем замену

$$\left(\frac{x+5}{x}\right)^{0,5}=y.$$

Уравнение превратится в следующее

$$y+\frac{4}{y}=4.$$

Умножаем на у и переписываем в виде квадратного уравнения

$$y^2-4y+4=0.$$

Теорема Виета дает нам два одинаковые корни
$y_1 = y_2 = 2.$

Возвращаемся к замене и находим решение
$$\left(\frac{x+5}{x}\right)^{0,5} = 2;$$
$$\frac{x+5}{x} = 4 \Rightarrow x+5 = 4x \Rightarrow x = \frac{5}{3}.$$

Значение x=5/3 удовлетворяет уравнения.

Пример 6. *Найти решение иррационального уравнения*
$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}.$$

Решение:
Подносим к кубу обе стороны и упрощаем
$$x-1+x-2+3\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x-2}\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}\right) = 2x-3;$$
$$2x-3+3\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x-2}\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}\right) = 2x-3;$$
$$3\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x-2}\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}\right) = 0.$$

Стоит отметить, что выражение в скобках соответствует правой стороне заданного уравнения. В подобных примерах такие ситуации встречаются часто, поэтому будьте внимательны при решении. Делаем подстановку
$$3\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x-2}\sqrt[3]{2x-3} = 0.$$

Приравниваем каждый из множителей к нулю и решаем
$$\sqrt[3]{x-1} = 0 \Rightarrow x = 0;$$
$$\sqrt[3]{x-2} = 0 \Rightarrow x = 2;$$
$$\sqrt[3]{2x-3} = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Проверку выполните самостоятельно. Она покажет, что все три найденные значения превращают уравнения в тождество.

$$x = 0;\ x = \frac{2}{3};\ x = 2.$$

Пример 7. *Найти решение иррационального уравнения*
$$(x-3)\sqrt{x^2-5x-2} = 2x-6.$$

Решение:
Такой тип уравнений придуман для невнимательных студентов. При спокойном анализе можно увидеть следующую закономерность
$$(x-3)\sqrt{x^2-5x-2} = 2(x-3).$$

Стандартное возведения в квадрат в данном случае было бы длинным и сложным путем к отысканию решений. С скобок получим значение

$x-3=0 \Rightarrow x=3.$

Упрощаем исходное уравнение и подносим к квадрату

$$\left(\sqrt{x^2-5x-2}\right)^2=2^2;$$

$$x^2-5x-2=4;$$

$$x^2-5x-6=0.$$

К полученному квадратного уравнения вычисляем дискриминант

$$D=5^2-4\cdot 1\cdot(-6)=49=7^2.$$

Корни уравнения находим по формуле

$$x_{1,2}=\frac{5\pm 7}{2}\Rightarrow$$

$$x_1=6;\ x_2=-1.$$

Таким образом установлено, что подобные уравнения могут иметь до трех решений

$x=-1;\ x=3;\ x=6.$

Задания для самостоятельной работы

1. Решить уравнения

$a)\ \sqrt{x^2-6x+7}=-1,\qquad d)\ \sqrt{\frac{4-x}{x}}+\sqrt{\frac{x-4}{x+1}}=2-\sqrt{x^2-12},$

$b)\ \sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}=0,\qquad e)\ \sqrt{x-2}+\sqrt{x+7}=1+\sqrt{4-x},$

$c)\ \sqrt{3-x}+\sqrt{x-5}=3,\qquad f)\ (4x^2-9)\sqrt{x-1}=0.$

2. Решить уравнения

$a)\ \sqrt[3]{5x+27}=x+3,\qquad c)\ \sqrt{x^2-9x+25}=2x-13,$

$b)\ \sqrt[3]{x}=\sqrt{x-4},\qquad d)\ \sqrt{3-x}+\sqrt{6+x}=3.$

3. Решить уравнения

$a)\ \sqrt{x^2-9x+25}=2x-13,\qquad b)\ \sqrt{10-x}=x+2.$

4. Решить уравнения

$a)\ \sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1,\qquad c)\ \sqrt{x^2-x-2}+\sqrt{x^2+2x-8}=\sqrt{x^2-5x+6},$

$b)\ \sqrt{\frac{20+x}{x}}+\sqrt{\frac{20-x}{x}}=\sqrt{6},\qquad d)\ \sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{11-x}.$

Контрольные вопросы

1. Какими методами решаются иррациональные уравнения?
2. Алгоритм решения методом возведения в степень, равную показателю корня.
3. Алгоритм решения методом введения новой переменной.
4. Какой этап содержат все эти методы?

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова

Практическая работа №17
Решение показательных уравнений и неравенств.

Цель: научиться применять свойства степеней и показательной функции к решению показательных уравнений.

Оснащение рабочего места

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания;
2. Изучение теоретического материала по методической разработке;
3. Выполнение задания;
4. Ответы на вопросы.

Краткая теория

Показательными называются такие уравнения, в которых неизвестное входит в показатель степени. Уравнениеах =b называется простейшим показательным уравнением.

Показательные уравнения решаются после преобразований с помощью свойств степени.

Свойства степени

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$;
3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;
4. $(a:b)^n = a^n : b^n$
5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

Основные способы решения показательных уравнений:

1. Приведение левой и правой части к одному основанию.

Пример 1. $5^x=625$.

Записав 625 как 5^4,

получим $5^x=5^4$,

откуда $x=4$

2. Вынесение за скобки множителя с наименьшим показателем степени.

Пример 2. $2^x+2^{x-1-}2^{x-3}=44$.

Так как наименьшим показателем степени является x-3, то за скобки выносим 2x-3.

$2^{x-3}(2^3+2^2-1)=44$

$2x^{-3}(8+4-1)=44$

$2^{x-3}\cdot 11=44$

$2^{x-3}=4$

$2^{x-3}=2^2$

$x-3=2$

$x=5$

3. Подстановка и приведение к квадратному уравнению.

Пример 3. $7^{2x}-48\cdot 7^x=49$

Полагая $7^x=t$,

получим квадратное уравнение $t^2-48t-49=0$.

Используем формулы для нахождения корней квадратного уравнения

и получаем ; $D=b^2-4ac$,

$t_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ *и получаем* $D=(-48)^2-4\cdot 1(-49)=2500$; $t_{1,2}=\dfrac{48\pm\sqrt{2500}}{2}=-1;49$

Так как $7^x=t$, то $7^x=-1$ это равенство невозможно, так как показательная функция может принимать только положительные значения.
$7^x=49$; $7^x=49$; $7^x=7^2$; $x=2$

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1	***Вариант 2***
1. Решить уравнения $\left(\frac{1}{5}\right)^x=25$ *б)* $\left(\sqrt{6}\right)^x=\frac{1}{36}$ *в)* $(4)^{5-2x}=0{,}25$ *г)* $0{,}3^{7+4x}=0{,}027$	*1. Решить уравнения* $\left(\frac{1}{3}\right)^x=27$ *б)* $\left(\sqrt{5}\right)^x=\frac{1}{25}$ *в)* $0{,}4^{5-2x}=0{,}25$ *г)* $3^{7+4x}=27$
2.Решить уравнения *а)* $\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$ *б)* $\sqrt{8^{x-3}}=\sqrt[3]{4^{2-x}}$ *в)* $3^{6-x}=3^{3x-2}$ *г)* $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2=x-0,5}=\frac{\sqrt{7}}{7}$	*2. Решить уравнения* *а)* $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1}=\left(\frac{7}{3}\right)^{5x-3}$ *б)* $\sqrt{2^x}\sqrt{3^x}=36$ *в)* $3^{0,5-x}=9^{3x}$ *г)* $2^{x^2+2x-0,5}=4\sqrt{2}$
3. Решить уравнения *а)* $7^{x+2}+4\cdot 7^{x+1}=539$ *б)* $2\cdot 3^{x+1}-3^x=15$ *в)* $9^x-8\cdot 3^x-9=0$ *г)* $100^x-11\cdot 10^x+10=0$	*3. Решить уравнения* *а)* $4^{x+1}+4^x=320$ *б)* $3\cdot 5^{x+3}+2\cdot 5^{x+1}=77$ *в)* $36^x-4\cdot 6^x-12=0$ *г)* $49^x-8\cdot 7^x+7=0$
4. Решить уравнения *а)* $3^{x+1}-2\cdot 3^{x-2}=75$ *б)* $5^{x+1}=8^{x+1}$	*4. Решить уравнения* *а)* $5\cdot 9^x+9^{x-2}=406$ *б)* $7^{x-2}=4^{2-x}$

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте свойства показательной функции.
2. Сформулируйте свойства степеней.

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова

Практическая работа №18

Решение логарифмических уравнений и неравенств.

Цель: научиться применять свойства логарифмов и логарифмической функции к решению логарифмических уравнений и неравенств.

Оснащение рабочего места

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания;
2. Изучение теоретического материала по методической разработке;
3. Выполнение задания;
4. Ответы на вопросы.

Краткая теория

Рассмотрим простейшее логарифмическое уравнение $\log_a x=b$, где $x>0$ и $a\neq 1$ и $a>0$, данное уравнение имеет единственное решение. Из определения логарифма числа сразу следует, что a^b является таким решением. Если $x<0$, то уравнение не имеет корней.

Пример 1.*Решим уравнение* $\log_2(x^2+4x+3)=3$.

Данному уравнению удовлетворяют те значения x, для которых выполнено равенство $x^2+4x+3=2^3$. *Мы получили квадратное уравнение* $x^2+4x-5=0$, *корни которого равны 1 и -5. Следовательно, числа 1 и -5 –решения данного уравнения.*

Пример 2.*Решим уравнение* $\log_5(2x+3)=\log_5(x+1)$.

Это уравнение определено для тех значений x, при которых выполнены неравенства $2x+3>0$ *и* $x+1>0$.*Для этих x данное уравнение равносильно уравнению* $2x+3= x+1$, *из которого находим* $x= -2$. *Число* $x= -2$ *не удовлетворяет, однако, неравенству* $x+1>0$. *Следовательно, данное уравнение корней не имеет.*

Это же уравнение можно решить иначе. Переходя к следствию данного уравнения $2x+3=x+1$, *находим, что* $x= -2$. *Как всегда, при неравносильных преобразованиях уравнений найденное значение необходимо проверить подстановкой в исходное уравнение. В данном* случае получаем, что равенство $\log_5(-1)=\log_5(-1)$ неверно (оно не имеет смысла).

Пример 3.*Решим уравнение* $\log_x(x^2-2x+2)=1$

Этому уравнению удовлетворяют такие числа x, для которых выполнены условия: $x>0$ *и* $x\neq 1$ *(x- основание логарифмической функции) и равенство* $x^2-2x+2=x$, *т.е.* $x^2-3x+2=0$.*Полученное квадратное уравнение имеет корни 1 и 2. Но* $x=1$ *не может быть решением данного уравнения. Следовательно, решением данного уравнения является только число 2.*

При решении логарифмических неравенств надо помнить:

- если $0<a<1$, то функция $y=\log_a x$ – убывает и знак неравенства меняется на противоположный;
- если $a>1$, то функция $y=\log_a x$ –возрастает и знак неравенства не меняется.

Пример 4.*Решим неравенство* $\log_{\frac{1}{3}}(5-2x)> -2$.

Число -2 равно $\log_{\frac{1}{3}}9$*. Поэтому данное неравенство можно переписать в виде*

$\log_{\frac{1}{3}}(5-2x)>\log_{\frac{1}{3}}9$*.*

Логарифмическая функция с основанием $\frac{1}{3}$ определена и убывает на R_+, так как $\frac{1}{3}<1$. Следовательно, второму неравенству удовлетворяю такие числа *x*, для которых выполнено условие

$0<5-2x<9$, откуда $-2<x<2{,}5$.

Итак, множество решений данного неравенства есть интервал (-2;2,5)

Пример 5*. Решим уравнение* $\log_5^2 x-\log_{\sqrt{5}} x-3=0$*. Перейдем во втором слагаемом к основанию 5 и сделаем замену переменной* $t=\log_5 x$*, тогда*

$$\log_{\sqrt{5}} x=\frac{\log_5 x}{\log_5\sqrt{5}}=\frac{t}{\frac{1}{2}}=2t$$

Теперь данное уравнение перепишется в виде $t^2-2t-3=0$*.*

Корни этого уравнения 3 и -1.

Решая уравнение замены $\log_5 x=3$ *и* $\log_5 x=-1$*,*

находим $x=5^3=125$ *и* $x=5^{-1}=0{,}2$*.*

Пример 6.*Решим уравнение* $5^{1-3x}=7$*.*

По определению логарифма $1-3x=\log_5 7$*, откуда* $x=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\log_5 7$

Задания для самостоятельной работы

I. Решить уравнения:

1. а) $9^x=0{,}7$ б) $0{,}3^x=7$;
2. а) $\log_5 x=2$ б) $\log_{0,4} x=-1$;
3. а) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-4)=-2$; б) $\log_\pi(x^2+2x+3)=\log_\pi 6$
4. а) $\log_a x=2\log_a 3+\log_a 5$ б) $\lg(x-9)+\lg(2x-1)=2$;
5. а) $\frac{1}{2}\log_2(x-4)+\frac{1}{2}\log_2(2x-1)=\log_2 3$; б) $\lg(3x^2+12x+19)-\lg(3x+4)=1$;
6. а) $\log_a x=\log_{\sqrt{a}}2+\log_{\frac{1}{a}}3$ б) $\log_x 2-\log_4 x+\frac{7}{6}=0$;

II. Решите неравенства:

1. а) $\log_4(x-2)<2$ б) $\log_{\frac{1}{3}}(3-2x)>1$;
2. а) $\lg(2x-3)>\lg(x+1)$; б) $\log_{0,3}(2x-4)>\log_{0,3}(x+1)$;
3. а) $\log_2^2 x-\log_2 x\le 6$; б) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x-4>0$;

Контрольные вопросы

1. Перечислите свойства логарифмов.
2. Какова область определения логарифмической функции?
3. Какова область значений логарифмической функции?

В каком случае логарифмическая функция возрастает и убывает

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015

2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова

Практическая работа №19

Вычисление производных

Цель: Отработка умения находить производные с помощью формул и правил дифференцирования.

Оснащение рабочего места

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания;
2. Изучение теоретического материала по методической разработке;
3. Выполнение задания;
4. Ответы на вопросы.

Краткая теория.

Производной функции y=f(x) в точке x называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.

Обозначение: y' или f' (x). $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Функция	*Производная*	*Функция*	*Производная*
c(const)	0	a^x	$a^x \ln a$
x	1	e^x	e^x
x^n	nx^{n-1}	$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$
tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\cos x$	$-\sin x$
$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования функций

1. $(ku \cdot (x))' = k \cdot u'(x)$

2. $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$

3. $(uv)' = u'v + v'u$

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Если y есть функция от u: y=F(u), где u=f(x), т.е. если y зависит от x через промежуточный аргумент u, то y=F(u)=F(f(x)) называется функцией от функции или ***сложной функцией****.*

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной: y'(x)=F′(u)u′ (x)

Функция	**Производная**	**Функция**	**Производная**
$(u)^n$	$nu^{n-1} \cdot u'$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2} \cdot u'$	$\sin u$	$(\cos u)u'$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\cos u$	$(-\sin u)u'$
a^u	$a^u \ln a \cdot u'$	tgu	$\frac{u'}{\cos^2 u}$
e^u	$e^u \cdot u'$	$ctgu$	$-\frac{u'}{\sin^2 u}$
$\log_a u$	$\frac{u'}{u \cdot \ln a}$	$\sqrt[n]{u}$	$\frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$

Производная сложной функции равна произведению производных от всех составляющих ее функций. При этом следует помнить, что каждую функцию нужно дифференцировать по ее собственному аргументу.

Очень важно правильно определить порядок следования промежуточных функций. Например, для функции y = $\ln tg^2 3x$ промежуточные функции расположены в следующем порядке:

1. Логарифмическая $\ln tg^2 3x$
2. Степенная $(tg3x)^2$
3. Тригонометрическая tg3x
4. Линейная 3x

y=lntg²3x

$$y' = \frac{1}{tg^2 3x} \cdot (tg^2 3x)' = \frac{1}{tg^2 3x} \cdot 2tg3x \cdot (tg3x)' = \frac{1}{tg^2 3x} \cdot 2tg3x \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot (3x)' =$$

$$= \frac{1}{tg^2 3x} \cdot 2tg3x \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3 = \frac{6}{\sin 3x \cdot \cos 3x} = \frac{12}{\sin 6x}$$

Пример 1: *y = $(x^2+3x)^5$,найти $y'(1)$.*

Промежуточные функции:

1. степенная $(x^2+3x)^5$

2. квадратичная $x^2 +3x$

$y' = 5(x^2+3x)^4\ (x^2+3x)' = 5(x^2+3x)^4 * 2x+3)$ $y'(1) = 5(1^2+3\cdot 1)^4\ (2*1+3) = 3900$

Задания для самостоятельной работы

Блок 1.Вариант 1

Найти производные функций:

1) $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 13$ 2) $y = \sqrt{x}(1-2x)$ 3) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

4) $y = \sqrt{5-2x}$ 5) $f(x) = tg3x$ 6) $y = 31^{t^3+3t}$

7) $y = 2x^7 - 3x^5 - x - 10$ 8) $y = \sqrt{x}(5x-1)$ 9) $y = \frac{\sqrt{x}}{4+x}$

10) $y = (2x-3)^5$ 11) $f(x) = \sin 2x$ 12) $y = 2\sqrt{1+2x-x^2}$

13) $y = \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + \sqrt{7}$ 14) $y = 5x^2 - \frac{2}{x^2}$ 15) $y = x^3 - \frac{2}{x^3}$

16) $y = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$ 17) $\sqrt{x}(x^2-3x)$ 18) $y = \frac{2x+3}{\cos x}$

Блок 1.Вариант 2

Найти производные функций:

1) $y = 3x^6 + 3x^5 - 2x + 5$ 2) $y = \sqrt{x}(3x-6)$ 3) $y = \frac{x-1}{2-3x}$

4) $y = (6x+2)^5$ 5) $y = 2^{\sqrt{x}+3}$ 6) $y = \ln 3x$

7) $y = x^6 - 3x^4 + 7x^2 - 14$ 8) $y = \sqrt{x}(2-3x)$ 9) $y = \frac{\sqrt{z}}{5+z}$

10) $y = \sqrt{5-2x}$ 11) $y = \lg(3x^2 + 4x - 7)$ 12) $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

13) $y = -\frac{3}{7}x^7 - \frac{2}{3}x^3 + \sqrt{2}$ 14) $y = \sqrt{x}(x^2-2x)$ 15) $y = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$

16) $y = 5x^2 - \frac{2}{x^2}$ 17) $y = (2x-3)^5$ 18) $y = \frac{x^2}{\ln x}$

Блок 2

Найти производные сложных функций

1. $y = (9 - x^2)^4$
2. $y = (x^4 - x - 2x^2)^4$
3. $y = \sqrt{x^3+1}$
4. $y = \sqrt[3]{(1-x^2)^2}$
5. $y = \sin 5x$
6. $y = \cos^2 3x$
7. $y = 8\sin^3 5x$
8. $y = \ln x^2 \frac{x+2}{x-2}$
9. $y = \ln \sin^3 5x$
10. $y = \ln\sqrt{2x-1}$
11. $y = \frac{1}{(x^2-1)^4}$
12. $y = (x^2+6)\sqrt{x^2-3}$
13. $y = \sqrt[3]{(x^3+1)^2}$
14. $y = \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}$
15. $y = \frac{1+2x}{\sqrt{1-2x}}$
16. $y = \frac{\ln x - 2}{\ln x}$
17. $y = \ln(2x^2-3)$

11.y=ln$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется дифференцируемой?
2. Как найти частное значение производной?
3. Чему равна производная постоянной величины?

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова

Практическая работа № 20
Геометрический и механический смысл производной

Цель: Отработка понятия второй производной, знакомство ее физическим и геометрическим смыслом, формирование умения находить производные второго порядка, применять вторую производную для решения физических задач.

Оснащение рабочего места

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания;
2. Изучение теоретического материала по методической разработке;
3. Выполнение задания;
4. Ответы на вопросы.

Краткая теория

Пусть функция y = f(x) дифференцируема в некотором интервале (a,b). Продифференцировав ее по x, мы получаем так называемую первую производную от функции f(x).

Производная от первой производной называется ***производной второго*** **порядка** или ***второй производной*** от первоначальной функции и обозначается y″, или f''(x).

$y''=(y')'=f''(x)$,

Если, например, $y = x^4$, то $y' = 4x^3$, поэтому вторая производная функции будете $y'' = (4x^3)' = 12x^2$. Производная от второй производной называется ***производной третьего порядка*** или ***третьей производной*** и обозначается y'''.

Пусть тело движется по закону s = f(t). Известно, что скорость тела в данный момент (мгновенная скорость) равна первой производной от пути по времени:

$$V = S' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

За промежуток времени Δt, истекший с момента t, скорость изменится и получит приращение Δv.

Средним ускорением за время Δt называется отношение приращения скорости Δv к приращению времени Δt: $a_{ср} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Мгновенным ускорением (ускорением в данный момент) называется предел отношения приращения скорости к приращению времени при стремлении приращения времени к нулю:

$$a_{мгн} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v' = (s')' = s''$$

Следовательно, ***ускорение прямолинейного движения равно второй производной от пути по времени.*** **В этом и заключается *механический смысл второй производной.***

Пример1. Найти скорость v и ускорениеa свободно падающего тела, если зависимость расстояния s от времени t задана формулой

$$s = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + s_0$$,

где g = 9,8 *м/с²* — ускорение свободного падения; s_0=s(0) значением s при t=*0*.

Решение. $v = s'$ = gt+v_0, при t = 0 =>v = v_0.

a=v'=s"=g=9,8м/с².

Задания для самостоятельной работы

1. Для функции $y = 5x^4$ найдите *y''*.

2. Для функции $y = (2x + 8)(x^8 + x^6)$ найдите *y''*.

3. Прямолинейное движение точки происходит по закону $s = (t^4 - 5)$ м. Определитеускорение в момент времени t=*3 с*.

4. Тело движется прямолинейно по закону $s = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 8$. Найдите скорость и ускорение тела в момент времени t = 10 *с*.

5. Определить момент времени t, в который ускорение прямолинейного движения, совершаемого по закону $S = -\frac{1}{6}t^3 + 3t^2 - 5$, равно нулю. Какова при этом скорость?

6. Закон движения частицы определяется уравнением $S(t) = t^3 - 1$. Каково ускорение частицы в момент временикогда ее скорость равна 11м/с?

7. Точка движется по оси абсцисс по закону $x = 2t^3 - 4t^2 + 2t + 3$, где t -время в секундах, отсчитываемое от t =0, ах- расстояние от точки до начала координат в метрах. Требуется

а)определить закон изменения скорости и ускорения движения от времени t

б)найти начальную скорость и скорость в момент времени t = 3с.

в) установить существуют ли моменты времени, когда скорость равна 0, и если да то какие положения движущейся точки соответствуют этим моментам.

8. Тело, масса которого 30кг, движется прямолинейно по закону $S = 4t^2 + t - 4$

Доказать, что движение тела происходит под действием постоянной силы.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение производной функции.
2. Чему равна производная постоянной?
3. Дайте определение производной второго порядка.
4. В чем заключается механический смысл второй производной?

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова

Практическая работа № 21
«Исследование функций и построение графиков»

Цель: корректировать знания, умения и навыки по теме: «Исследование функции и построение ее графика, применять вторую производную для решения физических задач.

Оснащение рабочего места

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

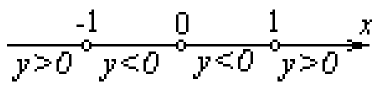
1. Получение индивидуального задания;
2. Изучение теоретического материала по методической разработке;
3. Выполнение задания;
4. Ответы на вопросы.

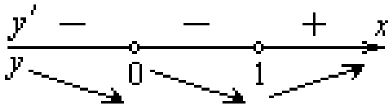
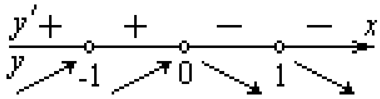
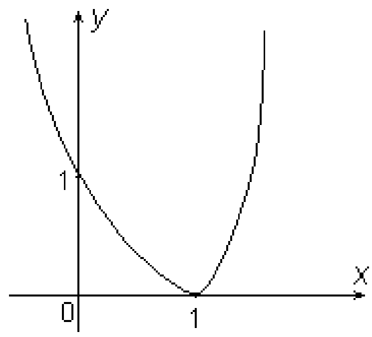
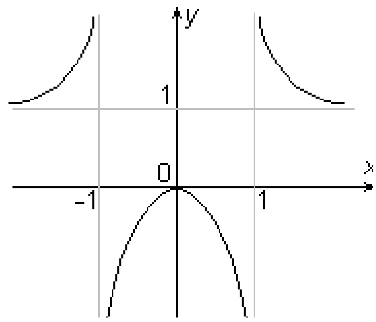
Краткая теория

Обучающая таблица

Задание. Исследуйте и постройте графики функции:

а) $f(x)=3x^4-4x^3+1$; ***б)*** $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

№	*План исследования ф-ции*	*Применение плана*	
		а) $f(x)=3x^4-4x^3+1$	*б)* $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$
1	*Находим область определения функции*	$D(f)=R$	$x^2-1=0$, $x=\pm1$, $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup$ $\cup(1;+\infty)$
2	*Исследуем функцию на четность, нечетность*	$f(-x)=3x^4+4x^3+1\neq\pm f(x)$ $\Rightarrow$ *функция ни четная, ни нечетная*	$f(-x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}=f(x)$ $\Rightarrow$ *функция четная*
3	*Находим нули (корни) функции и промежутки её знакопостоянства*	$3x^4-4x^3+1=0,\ (3x^4-3x^3)-$ $-(x^3-1)=0$, $(x-1)^2(3x^2+2x+1)=0$, $x-1=0$, $x=1$ *- нуль*	$\dfrac{x^2}{x^2-1}=0$, 

		функции	
4	***Находим производную функции и её критические точки***	$f'(x)=(3x^4-4x^3+1)' = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$, $f'(x)=0 \Rightarrow x=0;1$ - ***критические точки функции***	$f'(x)=\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)' =$ $=\dfrac{2x(x^2-1)-2x^3}{(x^2-1)^2}=-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$ $f'(x)=0 \Rightarrow x=0$ - ***критическая точка функции***
5	***Находим промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции***	 $y'(-1)<0, y'(0{,}5)<0, y'(2)>0$ ***x=0 – не является точкой экстремума, x=1 – точка минимума,*** $y_{min}=y(1)=0$	 $y'(-2)>0, y'(-0{,}5)>0,$ $y'(0{,}5)<0, y'(2)<0$, ***x=0 – точка максимума,*** $y_{max}=y(0)=0$
6	***Находим предел функции при*** $x\to\pm\infty$	$\lim\limits_{\Delta x\to\pm\infty}(3x^4-4x^3+1)=\infty$	$\lim\limits_{\Delta x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1}=1$
7	***Строим эскиз графика функции***		

Примеры. Исследуйте и постройте графики функций:

1) $y = x^2 - 3x + 2$***; 2)*** $y = 2x^2 - x^4 - 1$***; 3)*** $y = 6x - x^2 - 5$***; 4)*** $y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}$***; 5)*** $y = 3x - x^3$***; 6)*** $y = x^3 - 3x^2 + 4$***; 7)*** $y = x^3 - 3x + 1$***; 8)*** $y = \frac{(x-3)^2}{x^2}$***; 9)*** $y = x^2 + \frac{1}{x}$**.**

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1.

1. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{x}{2} - x^4$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$ и постройте ее график.

Вариант 2.

1. Исследуйте функцию $f(x) = x^3 - 3x$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1{,}5x^2$ и постройте ее график.

Вариант 3.

1. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ и постройте ее график.

Вариант 4.

1. Исследуйте функцию $f(x) = 12x - x^3$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5$ и постройте ее график.

Вариант 5.

1. Исследуйте функцию $f(x)=3x^4-6x^2+4$ на максимум и минимум.

2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x)=-x^3+3x+2$ и постройте ее график.

Вариант 6.

1. Исследуйте функцию $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x+1$ на максимум и минимум.

2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x)=x^3-3x$ и постройте ее график.

Вариант 7.

1. Исследуйте функцию $f(x)=x^3-x^4$ на максимум и минимум.

2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x)=-x^4+5x^2+4$ и постройте ее график.

Вариант 8.

1. Исследуйте функцию $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2+5$ на максимум и минимум.

2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x)=x^3-x^2$ и постройте ее график.

Контрольные вопросы:

1. Какую точку называют критической (стационарной) точкой функции?
2. Сформулируйте признак возрастания (убывания) функции.
3. Сформулируйте признак максимума (минимума) функции.
4. Опишите схему исследования функции.

Практическая работа № 22

Нахождение интегралов методом непосредственного интегрирования

Цель: Научиться вычислять табличные интегралы, вычислять интегралы методом непосредственного интегрирования

Оснащение рабочего места

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания;
2. Изучение теоретического материала по методической разработке;
3. Выполнение задания;
4. Ответы на вопросы.

Краткая теория:

Множество всех первообразных функции f(x) на некотором промежутке называется ***неопределенным интегралом от функции f(x)*** *на этом промежутке и обозначается символом* $\int f(x)dx$.

$\int$ **f(x)dx = F(x) + C**, где F(x) – какая-либо первообразная функции f(x), а C – произвольная постоянная.

Нахождение функции по ее производной называется интегрированием функции. Интегрирование – действие, обратное дифференцированию. Правильность интегрирования можно проверить дифференцированием.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. *Если функция f(x) имеет первообразную, то при a ≠ 0 верно равенство* $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$. *(постоянный отличный от нуля множитель можно выносить за знак интеграла).*
2. *Если функции f(x) и g(x) имеют первообразные, то* $\int(f(x) + g(x)dx) = \int f(x)dx + \int g(x)dx$. *(интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций).*

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0dx = C$, C – постоянная
2. $\int кdx = кx + C$
3. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\quad \alpha \neq -1$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
8.
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$
10. $\int e^x = e^x + C.$
11. $\int a^x = \frac{a^x}{\ln a} + C.$
12. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$

Нахождение неопределенных интегралов (методы интегрирования)

Непосредственным интегрированием называется такой метод вычисления интегралов, при котором они сводятся к табличным путям применения к ним основных свойств неопределенных интегралов. При этом подынтегральную функцию обычно предварительно соответствующим образом преобразуют.

Пример 1. *Найти* $\int (1+\sqrt{x})^2\,dx$. Преобразовав подынтегральную функцию и воспользовавшись свойствами 3 и 4 интеграла, находим: $\int (1+\sqrt{x})^2\,dx = \int (1+2\sqrt{x}+x)\,dx = \int dx + 2\int\sqrt{x}\,dx + \int x\,dx = x + \frac{4x\sqrt{x}}{3} + \frac{x^2}{2} + C$.

Задания для самостоятельной работы:

1. $\int (x^7 + 4x)dx$
2. $\int (2 - 3\sin x)dx$
3. $\int (4x^3 + 3x^2 - 2x - 8)dx$
4. $\int \frac{(x^2+3)^2}{x^2}dx$
5. $\int 4\sin x\,dx$
6. $\int \left(\frac{2}{\cos^2\varphi} - \frac{3}{\sin^2\varphi}\right)d\varphi$
7. $\int (4x + 3)^2 dx$
8. $\int (2x^2 - \cos x)dx$
9. $\int \frac{(x+2)^2}{x}dx$
10. $\int \frac{3a\,du}{\sin^2 u}$
11. $\int 2a\cos\varphi\,d\varphi$
12. $\int \frac{x^8 - 3x^5}{x^3}dx$
13. $\int (3x - 8)^2 dx$
14. $\int (3x^2 + \sin x)dx$
15. $\int (3x^2 - 2\cos x)dx$
16. $\int \frac{6dx}{1+x^2}$
17. $\int \frac{2dt}{\cos^2 t}$
18. $\int \frac{\sin 2x}{\sin x}dx$

Контрольные вопросы:

1. Какие свойства неопределенного интеграла вы знаете?
2. Перечислите основные формулы интегрирования.
3. Какие методы интегрирования вы знаете?

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова

Практическая работа № 23
Нахождение интегралов методом подстановки

Цель: Научиться вычислять табличные интегралы, вычислять интегралы с помощью метода подстановки

Оснащение рабочего места

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания;
2. Изучение теоретического материала по методической разработке;
3. Выполнение задания;
4. Ответы на вопросы.

Краткая теория:

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. *Если функция f(x) имеет первообразную, то при a ≠ 0 верно равенство* $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$. *(постоянный отличный от нуля множитель можно выносить за знак интеграла).*
2. *Если функции f(x) и g(x) имеют первообразные, то* $\int (f(x) + g(x)dx) = \int f(x)dx + \int g(x)dx$. *(интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций).*

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0dx = C$, C – постоянная 2. $\int кdx = кx + C$ 3. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\quad \alpha \neq -1$ 4. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$ 5. $\int \cos x dx = \sin x + C$ 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$ 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$ 9. $\int e^x = e^x + C.$ 10. $\int a^x = \frac{a^x}{\ln a} + C.$ 11. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$

Интегрирование методом замены переменно (методом подстановки)

В основе *метода подстановки* вычисления неопределенных интегралов лежит следующая формула, являющаяся простым следствием правила дифференцирования сложной функции:

$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$, (1) где F(t) – какая – либо первообразная функции f(t), t = g(x).

Правую часть формулы (1) обычно записывают в виде $\int f(t)dt$ (2), где t = g(x). Из формулы (1) следует, что если подынтегральное выражение имеет вид $f(g(x))g'(x)dx = f(g(x))dg(x)$ (3) или приводится к этому виду,

то интеграл $\int f(g(x))g'(x)dx$ можно свести к интегралу $\int f(t)dt$ (2) с помощью замены переменной, положив t = g(x).

Пример 1. Найти $\int(2x+1)^{10}dx$.

Т.к. $(2x+1)^{10}dx = \frac{1}{2}(2x+1)^{10}d(2x+1)$, *то, положив* $t = 2x + 1$, *получим:*

$$\int(2x+1)^{10}dx = \frac{1}{2}\int(2x+1)^{10}d(2x+1) = \frac{1}{2}\int t^{10}dt = \frac{1}{22}t^{11} + C = \frac{1}{22}(2x+1)^{11} + C.$$

Пример 2. Найти $\int \sin x\cos^7 x dx$.

Положим $t = \cos x$, *тогда* $dt = -\sin x dx$. *Следовательно,* $\int \sin x\cos^7 x dx =$

$$= -\int t^7\, dt = -\frac{t^8}{8} + C = -\frac{\cos^8 x}{8} + C.$$

Задания для самостоятельной работы:

Найти неопределенные интегралы методом подстановки:

1. $\int(x+5)^7dx$
2. $\int\sin^5 x\cos x dx$
3. $\int(3x-1)^5dx$
4. $\int(2x+7)^8dx$
5. $\int(7+3z)^5dz$
6. $\int\sin^3 x\cos x\, dx$
7. $\int\cos^7 x\sin x dx$

Контрольные вопросы:

1) Какие свойства неопределенного интеграла вы знаете?
2) Перечислите основные формулы интегрирования.
3) Какие методы интегрирования вы знаете?

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2015
3. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова

Практическая работа № 24
Вычисление площадей плоских фигур

Цель: вычислять определенные интегралы с помощью формул, научиться вычислять площадь криволинейной трапеции.

Оснащение рабочего места:
1. Настоящая методическая разработка.
2. Учебная литература.
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:
1. Получение индивидуального задания
2. Изучение теоретического материала по методической разработке.
3. Выполнение задания.
4. Ответ на вопросы.

Краткая теория:

1. Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ находят:

- неопределенный интеграл $\int f(x)dx = F(x) + c$;
- значение интеграла $F(x)+c$ при $x = b, c = 0,$ т.е вычисляют $F(b)$;
- значение интеграла $F(x)+c$ при $x = a, c = 0,$ т.е вычисляют $F(a)$;
- разность $F(b) - F(a)$.

Процесс вычисления виден из формулы

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Равенство называется формулой *Ньютона-Лейбница.*

Вычислить определенные интегралы.

Пример 1. $\int_3^5 dz.$ *Решение:* $\int_3^5 dz = z\Big|_3^5 = 5 - 3 = 2$

Пример 2. $\int_{-1}^1 (2x+1)dx.$ *Решение:* $\int_{-1}^1 (2x+1)dx = (x^2 + x)\Big|_{-1}^1 = (1^2+1) - ((-1)^2 - -1) = 0$

Пример 3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$ *Решение:* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sin\frac{\pi}{4}\Big| - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Определенный интеграл от непрерывной отрицательной функции равен площади соответствующей криволинейной трапеции (геометрический смысл определенного интеграла):

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

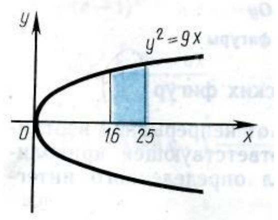
.

С помощью определенного интеграла можно также вычислять площади плоских фигур, так как эта задача всегда сводится к вычислению площадей криволинейных трапеций.

Площадь всякой плоской фигуры в прямоугольной системе координат может быть составлена из площадей криволинейных трапеций, прилегающих к оси *Ox* или к оси *Oy*.

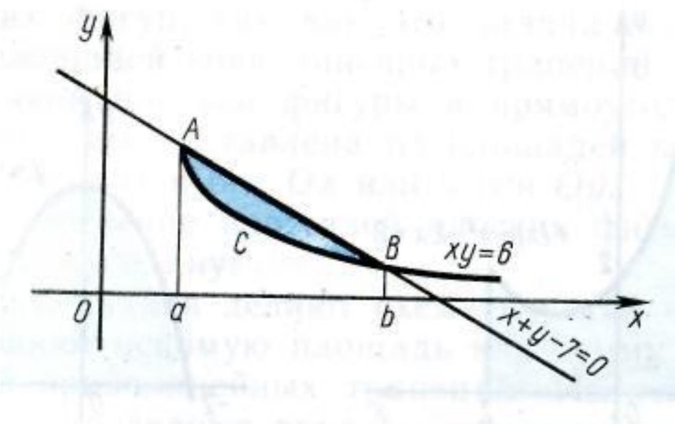
Задачи на вычисление площадей плоских фигур удобно решать по следующему плану:

1. По условию задачи делают схематический чертеж.
2. Представляют искомую площадь как сумму или разность площадей криволинейных трапеций. Из условия задачи и чертежа определяют пределы интегрирования для каждой составляющей криволинейной трапеции.
3. Записывают каждую функцию в виде $y = f(x)$.
4. Вычисляют площади каждой криволинейной трапеции и площадь искомой фигуры.



Пример 1. $y^2 = 9x, x = 16, x = 25$ и $y = 0$ (рис.)

Решение: $S = \int_{16}^{25} \sqrt{9x}dx = \int_{16}^{25} 3x^{1/2}dx = \left| 3\frac{x^{3/2}}{3/2} \right|_{16}^{25} = 2x\sqrt{x}\Big|_{16}^{25}$ *= 2(125-64)= 2*61=122 (кв.ед.)*



Пример 2. *xy=6 bx+y-7=0*

Решение:

$$S_{aABb} = \int_1^6 (7-x)dx = (7x - \frac{x^2}{2})\Big|_1^6 =$$

$$= (7*6 - \frac{36}{2}) - (7*1 - \frac{1}{2}) = 17{,}5 \text{ (кв.ед.)};$$

$S_{aABb} = \int_1^6 \frac{6dx}{x} = 6\ln x\Big|_1^6 = 61n6$ (кв.ед.),т.е. S=(17,5-61n6) (кв.ед.);

Задачи для самостоятельной работы:

1. Вычислить определенные интегралы

1. $\int_3^1 x^2dx;$
2. $\int_{-1}^1 (2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)dx$;
3. $\int_{-1}^1 e^x dx$;
4. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$;
5. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
6. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.
7.
8. $\int_0^1 5dx$;
9. $\int_2^3 6x^2dx$;
10. $\int_1^2 (5x^4 + 2x - 8)dx$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

1. *а).* $f(x) = x^2 - 2x + 2, x = -1, x = 2$ *и отрезком [-1,2] оси Ох.*
б).f(x)=x^2*, y=0, x=3;*

в) f(x)=cos x, y=0, x=0, x=$\frac{\pi}{3}$

г) f(x)=sin x, y=0, x=0, x=π *;*

2. $x - 2y + 4 = 0, x + y - 5 = 0$ и $y = 0$.
3. $y = x^2, y = \frac{1}{x},$ если $1 \prec x \prec e$;
4. $y^2 = x$ и $y = x^2$.
5. $x - 2y + 4 = 0, 3x + 2y - 12 = 0$ и $y = 0$.

Контрольные вопросы:

1. Что является основной задачей интегрального исчисления?
2. Что такое определенный интеграл?
3. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2015
3. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова

Практическая работа №25

Решение простейших задач по комбинаторике

Цель:знакомство с основными понятиями комбинаторики, умение решать простейшие задачи.

Оснащение рабочего места:

1. Настоящая методическая разработка.
2. Учебная литература.
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания
2. Изучение теоретического материала по методической разработке.
3. Выполнение задания.
4. Ответ на вопросы.

Краткая теория:

1. <u>Понятие факториала</u>

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n *включительно называют* n*-факториалом и пишут*$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . (n-1) \cdot n$

1. Вычислить: а) 3!; б) 7! – 5!; в) $\frac{7!+5!}{6!}$

Решение. а) $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

б) Так как $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ *и* $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$*, то можно вынести за скобки 5! Тогда получим*

$$5!\,(6 \cdot 7 - 1) = 5! \cdot 41 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 41 = 120 \cdot 41 = 4920$$

в) $\frac{5!(6\cdot 7+1)}{6!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 43}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = \frac{43}{6}$

2. Упростить: а) $\frac{(n+1)!}{n!}$; б) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$; в) $\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}$

Решение. а) Учитывая, что $(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n(n+1)$*, а* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$*, сократим дробь;* $\frac{(n+1)!}{n!} = n + 1$

б) Так как $(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)n(n+1)$*, то после сокращения получим* $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = n(n+1)$

в) Имеем $(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n(n+1)$*,* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$*. Приведем дробь к общему знаменателю, за который примем* $(n+1)!$*. Тогда получим*

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!} = \frac{1 + (n+1)}{(n+1)!} = \frac{n+2}{(n+1)!}$$

2. <u>Перестановки</u>

Пусть даны три буквы *A, B, C*. Составим все возможные комбинации из этих букв: *ABC; ACB; BCA; CAB; CBA; BAC* (всего 6 комбинаций). Мы видим, что они отличаются друг от друга только порядком расположения букв.

Комбинации из n *элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называются перестановками.*

Перестановки обозначаются символом P_n, где n - число элементов, входящих в каждую перестановку.

Число перестановок можно вычислить по формуле

$P_n = n(n-1)(n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$ (1)

или с помощью факториала:

$P_n = n!$ (2)

Так, число перестановок из трех элементов согласно формуле (2) составляет $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, что совпадает с результатом рассмотренного выше примера. Действительно, на первое место в комбинации (перестановке) можно поставить три буквы. На второе место уже можно поставить только две буквы из трех (одна заняла первое место), а на третьем окажется только одна из оставшихся. Значит, $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 = P_3$.

3. <u>Размещения.</u>

Пусть имеются четыре буквы*A, B, C, D.* Составим все комбинации только из двух букв, получим:

AB, AC, AD
BA, BC, BD
CA, CB, CD
DA, DB, DC

Мы видим, что все полученные комбинации отличаются друг от друга или буквами или их порядком (комбинации *AB и BA*считаются различными).

*Комбинации из **m** элементов по **n**, которые отличаются друг от друга или самими элементами или порядком элементов, называются размещениями.*

Размещения обозначаются символом A_m^n, где m - число всех имеющихся элементов, n - число элементов в каждой комбинации. При этом полагают, что $n \le m$. число размещений можно вычислить по формуле

$$A_m^n = \underbrace{m \cdot (m-1)(m-2)\dots}_{n \text{ множителей}} \qquad (3)$$

или $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$

<u>4. Сочетания</u>.

***Сочетаниями** называются все возможные комбинации из **m** элементов по **n**, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом (здесь**m** и **n** натуральные числа причем **n ≤ m**).*

Так из четырех различных букв *A, B, C, D* можно составить следующие комбинации *AB, AC, AD, BC, BD, CD*

Значит число сочетаний из четырех элементов по два равно $C_4^2 = 6$.

Формула нахождения сочетания равна $C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$. (5)

Кроме этой формулы имеет место следующая: $C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}$, (4)

Задания для самостоятельной работы.

1. Вычислить: а. $\frac{6!-4!}{3!}$. б. $\frac{5!}{3!+4!}$. в. $\frac{5! \cdot 3!}{6!}$

2. Упростить выражения:

а. $\frac{(n+1)!}{n}$. б. $\frac{n!}{n(n-1)}$. в. $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$.

г. $\frac{n!}{(n-2)!}$. д$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$. е. $\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$

3. сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что ни одна цифра в числе не повторяется?

4. В соревнованиях участвовало четыре команды. Сколько различных вариантов распределения мест между ними возможно?

5. Вычислить: а. $\frac{P_6 - P_5}{5!}$, б. $\frac{P_{20}}{P_4 \cdot P_{16}}$в. $\frac{P_x}{P_{(x-2)} \cdot P_2}$.

6. Вычислить: а) A_6^3, б) $\frac{A_{15}^3 + A_{15}^4}{A_{15}^5}$.

7. Сколько двузначных чисел можно составить из пяти цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что ни одна цифра в числе не повторяется?

8. Вычислить любым способом: а. A_{10}^3, б. A_{12}^5, в. A_6^4,
г. A_{25}^2, д. A_{13}^5, е. $\frac{A_8^5 - A_8^4}{A_8^3}$

9. Сколько существует вариантов распределения трех призовых мест, если в розыгрыше участвуют семь команд?

10. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

11. Сколько вариантов расписания можно составить на один день если имеется 8 учебных предметов, а в расписание на день могут быть включены только три из них?

12. Вычислите: а) C_8^3, б) C_{10}^8

13. Сколькими способами можно выбрать трех дежурных, если в классе 30 учащихся?

14. Найти x, если известно, что $C_{x-2}^2 = 21$

15. Найти x, если известно, что $C_x^2 = 153$

Контрольные вопросы:

1.Определение комбинаторики.

2. Что такое перестановки

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014

Практическая работа №26
Решение задач на перебор вариантов

Цель: знакомство с основными понятиями комбинаторики, умение решать простейшие задачи.

Оснащение рабочего места:

1. Настоящая методическая разработка.
2. Учебная литература.
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания
2. Изучение теоретического материала по методической разработке.
3. Выполнение задания.
4. Ответ на вопросы.

Краткая теория:

Сколькими способами можно выбрать три яблока из корзины? Сколько имеется вариантовшкольного расписания? Такого рода вопросами занимается комбинаторика. В комбинаторных задачах нас обычно интересует, сколько комбинаций, удовлетворяющих тем или инымусловиям, можно составить из заданного конечного набора объектов.

В простейших случаях мы можем просто выписать все нужные нам комбинации и подсчитать их. Однако выписывание ни в коем случае не должно быть бессистемным! Примерыправильного перебора — выписывание чисел по возрастанию или слов в алфавитном порядке;при таком переборе ни один вариант не ускользнёт от нас и, с другой стороны, будет исключена

возможность повторения вариантов.

Задача 1. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3?

Решение. Выписываем числа в порядке возрастания:

11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33.

Всего получилось 9 чисел.

Задача 2. К завтрашнему дню нужно сделать математику, русский и географию (в какой последовательности — безразлично.) Сколькими способами можно приготовить на завтра уроки?

Решение. Закодируем наши предметы буквами: М — математика, Р — русский, Г — география.

- *Тогда, например, МРГ — это вариант, когда мы сначала делаем математику, потом — русский,*
- *потом — географию. Выпишем варианты в алфавитном порядке:*
- *ГМР, ГРМ, МГР, МРГ, РГМ, РМГ.*
- *Получилось 6 вариантов. Итак, уроки на завтра можно сделать шестью способами.*

Задания для самостоятельной работы

Задачи первого уровня

1. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 6, 7, 8, 9?

2. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, если цифры в записи числане могут повторяться?

3. Петя и Вася пишут контрольную по математике. Петя может получить тройку или двойку,а Вася — пятёрку, четвёрку или тройку. Сколькими способами может завершиться для нихконтрольная?

4. Президент Анчурии заказывает у дизайнера государственный флаг, состоящий из трёх горизонтальных разноцветных полос — серой, бурой и малиновой. Сколько у президента имеетсявариантов выбора флага?

5. На прямой отметили четыре различные точки A, B, C, D. Сколько при этом получилосьотрезков?

6. На клетчатой бумаге нарисовали квадрат 4 × 4 и внутри него по линиям клеток прочертили горизонтальные и вертикальные отрезки параллельно сторонам. Сколько всего квадратовоказалось нарисовано?

7. Петя трижды подбрасывает монету. Сколько различных последовательностей орлов и решекон может при этом получить?

8. Сколько: а) двузначных; б) трёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2?

9. Алфавит племени Мумбо-Юмбо содержит только две буквы — А и У. Любая последовательность этих букв является словом. Сколько существует в языке этого племени слов: а) изчетырёх букв; б) не более, чем из трёх букв?

10. Турист хочет побывать в Риме, Париже, Лондоне и Афинах, но ещё не решил, в какойпоследовательности. Сколько перед ним различных вариантов выбора маршрута?

11. Анаграмма — это слово (не обязательно осмысленное), полученное из данного слова перестановкой букв. Например, бьорд является анаграммой слова дробь. Сколько анаграмм имеютслова маг, дед, краб, ирис?

12. Сколькими способами можно выложить в ряд два красных и два синих шарика? Шарикине отличаются ничем, кроме цвета.

13. В магазине продаётся белая, черная и зелёная ткань. Нужно купить ткань двух различныхцветов. Из какого числа вариантов приходится выбирать?

14. В вазе лежат яблоко, груша, персик и абрикос. Маше разрешили выбрать два каких-тофрукта. Сколько у Маши вариантов выбора?

15. В турнире участвовали пять шахматистов, причем каждый шахматист сыграл с каждымиз остальных по одной партии. Сколько партий было сыграно на турнире?

16. Вите хочется купить пять разных книг. Книги стоят одинаково, а денег хватает только натри книги. Сколькими способами Витя может выбрать три книги из пяти?

17. Сколькими способами можно купить две порции мороженого, если в продаже есть вафельные стаканчики, фруктовые стаканчики, шоколадные брикеты и эскимо?

18. Сколькими способами можно расставить три разных цветка в две вазы?

19. В некотором царстве три города: A, B и C. Из A в B ведут три дороги, из B в C — пятьдорог. Сколько различных путей ведут из A в C? Прямого пути между A и C нет.

20. У Ани четыре разных платья и три разных пары туфель. Собираясь на вечеринку, онадумает, чтобы ей надеть. Сколько всего у Ани вариантов?

Контрольные вопросы:
1.Определение комбинаторики.
2. Способы решения комбинаторных задач
Литература:
1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014

Практическая работа №27
Решение задач на нахождение вероятностей событий с помощью теорем сложения и умножения

Цель работы: Научиться решать простейшие задачи на определение вероятностей с использованием теоремы сложения вероятностей

Оснащение рабочего места:

1. Настоящая методическая разработка
1. Тетрадь для практических работ

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания
2. Изучить теоретический материал по методической разработке
2. Выполнить задания
2. Ответить на вопросы

Краткий теоретический материал

Событие – это факт, который при осуществлении определенных условий может произойти или нет. События обозначают большими буквами латинского алфавита А, В, С.

События бывают достоверные, невозможные и случайные.

Достоверное событие – это событие, которое в результате испытания непременно должно произойти.

Невозможное событие – это событие, которое в результате испытания не может произойти.

Случайное событие – это событие, которое при испытаниях может произойти или не произойти. Те или иные события реализуются с различной возможностью.

События называются **несовместными**, если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого.

События называются **совместными**, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появление другого.

События называются **равновозможными**, если нет оснований считать, что одно из них происходит чаще, чем другое.

Вероятность события – это число, характеризующее степень возможности появления событий при многократном повторении событий. Вероятность обозначается буквой Р.

Классическое определение вероятности: **Вероятностью** Р(А) события А называется отношение числа благоприятствующих исходов m к общему числу равновозможных несовместных исходов n: **$P(A) = \frac{m}{n}$.**

Пример. Найти вероятность выпадения числа, кратного 3 при одном бросании игрального кубика. Решение: Событие А – выпадение числа, кратного 3. Этому событию благоприятствуют два исхода: числа 3 и 6, т.е. m = 2. Общее число исходов состоит в выпадении чисел: 1,2,3,4,5,6, т.е. n= 6. Тогда искомая вероятность, по определению, равна отношению числа благоприятствующих исходов к числу всех исходов: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Пример. В урне 10 белых, 5 красных и 5 зеленых шаров. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет цветным (не белым). Решение: Число исходов, благоприятствующих событию А, равно сумме красных и зеленых шаров: m = 10. Общее число равновозможных несовместных исходов равно общему числу шаров в урне: n = 20. Тогда: P(A) = $\frac{m}{n} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

Суммой конечного числа событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них. (А + В).

Теорема. Вероятность суммы двух несовместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий: **Р(А +В) = Р(А) + Р(В).** (эта теорема распространяется на конечное число попарно несовместных событий).

Пример. Найти вероятность выпадения цифры 2 или 3 при бросании игральной кости. Решение: Событие А – выпадение цифры 2, вероятность этого события Р(А) = $\frac{1}{6}$. Событие В – выпадение цифры 3, вероятность этого события Р(В) = $\frac{1}{6}$. События несовместные, поэтому Р(А+В) = Р(А) + Р(В) = $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Пример. Получена партия одежды в количестве 40 штук. Из них 20 комплектов мужской одежды, 6 – женской и 14 – детской. Найти вероятность того, что взятая наугад одежда окажется не женской. Решение: Событие А – одежда мужская, вероятность Р(А) = $\frac{20}{40} = \frac{1}{2}$. Событие В – одежда женская, Р(В) = $\frac{6}{40} = \frac{3}{20}$. Событие С – одежда детская, Р(С) = $\frac{14}{40} = \frac{7}{20}$. Тогда Р(А+С) = Р(А) + Р(С) = $\frac{1}{2} + \frac{7}{20} = \frac{17}{20}$.

Задания для практического решения

Классическое определение вероятности

1. Из букв слова «вероятность» наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что выбранная буква будет: А – согласной; В – гласной; С – буква «о».
2. Все натуральные числа от 1 до 30 написаны на одинаковых карточках и положены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?
3. Бросаются две монеты. Какова вероятность того, что обе монеты упадут «решкой» кверху?
4. В урне 6 белых и 4 черных шаров. Из урны вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны вынимают еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым?
5. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 10. Какова вероятность того, что это число является простым?
6. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру, и набрал ее наугад. Какова вероятность того, что набранная цифра правильная?

Теорема сложения вероятностей

1. В ящике находятся пуговицы различных цветов: белых – 50%, красных – 20%, зеленых – 20%, синих – 10%. Какова вероятность того, что взятая наугад пуговица окажется синего или зеленого цвета.
2. Вероятность того, что стрелок, произведя выстрел, выбивает 10 очков, равна 0,4; 9 очков – 0,3 и 8 или меньше очков – 0,3. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет не менее 9 очков.
3. В магазин поступили телевизоры, 60% которых поставило первое предприятие, 25% - второе и 15% - третье. Какова вероятность того, что купленный телевизор изготовлен на первом или третьем предприятии.
4. При записи фамилий участников соревнований, общее число которых 420, оказалось, что начальной буквой фамилий у 10 из них была А, у 6 – Е, у 9 – И, у 12 – О, у 5 – У, у 3 – Ю, у всех остальных фамилия начиналась с согласной. Определить вероятность того, что фамилия участника начинается с гласной.
5. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Какова вероятность того, что будет вынута пика или туз?
6. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет четное или кратное трем число очков.

Вопросы для получения зачета по работе:

1. Определение события, виды событий
2. Определение вероятности события, классическое определение вероятности
3. Формулировка теоремы сложения вероятностей

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014

Практическая работа №28

Нахождение числовых характеристик случайной величины

Цель: Научиться вычислять решать задачи на математическое ожидание, на применение дисперсии, уметь применять закон распределения случайных величин.

Оснащение рабочего места:

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполненияработы:

1. Получить индивидуальное задание;
2. Изучить теоретический материал по методической разработке;
3. Выполнить задания;
4. Ответить на вопросы.

Краткая теория:

Математическим ожиданием дискретной случайной величины x, называется число M(x), которое вычисляется следующим образом

$M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$.

Дисперсией дискретной случайной величины x называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$D(x) = M\,[X - M(x)]^2$

$D(x) = [x_1 - M(x)\,]^2\,p_1 + \ldots + [x_n - M(x)\,]^2 p_n$

Пример 1.

В лотерее 100 билетов. Разыгрываются 1 выигрыш по 50 тыс. и 10 выигрышей по 1 тыс.

Пусть x - величина возможного выигрыша для человека, имеющего 1 билет.

$x_1 = 5000$ $P_1 = 0{,}01$

$x_2 = 1000$ $P_2 = 0{,}1$

$x_3 = 0$ $P_3 = 1 - (P_1 + P_2) = 0{,}89$

Закон распределения случайных величин

50000	*1000*	*0*
0,01	*0,1*	*0,89*

Пример2.

Случайная величина X задана следующим законом распределения:

X	*2*	*3*	*4*	*5*
	0,1	*0,2*	*0,3*	*0,4*

Найти M(x) и D(x).

$M(x) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}4 = 4$

Выпишем закон распределения X^2

X^2	*4*	*9*	*16*	*25*
	0,1	*0,2*	*0,3*	*0,4*

$M(x^2) = 4\cdot 0,1+9\cdot 0,2+ 16\cdot 0,3+25\cdot 0,4 = 17$

$D(x) = 17\text{-}4^2 = 1.$

Задания для самостоятельной работы.

1. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины х, зная закон ее распределения.

X	-1	0	1	2	3
p	0,05	0,2	0,4	0,3	0,05

2. Согласно американской традиции, вероятность того, что 25-летний человек проживет ещё 1 год, равна 0,992.
3. Компания предлагает застраховать жизнь на год на 1000 долларов с уплатой взноса в 10 долларов. Какую прибыль ожидает компания от страховки одного человека?
4. Найдите дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X, закон распределения, который задан таблицей

X	5	7	10	15
	0,2	0,5	0,2	0,1

5. Подсчитайте дисперсии случайных величин Xи Y, убедитесь, что D(x)>D(y)

X	2	20	28	50
	1/4	1/4	1/4	1/4

Y	23	25	26
	1/4	1/4	1/2

6. Случайная величина X задана следующим распределением

X	-5	10	15	25
	0,1	0,2	0,5	0,2

Найти M(x) и D(x).

Литература

1.Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015

2.Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014

Практическая работа № 29

Решение задач по теме «Прямые и плоскости в пространстве».

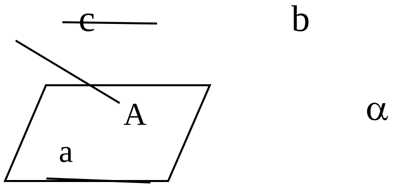
Цель работы: знать основные понятия стереометрии, аксиомы стереометрии, следствия из аксиом, теоремы. Уметь определять взаимное расположение в пространстве прямых, прямой и плоскости, плоскостей.

Оснащение рабочего места:

1. Настоящая методическая разработка.
2. Учебная литература.
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания.
2. Изучение теоретического материала по методической разработке.
3. Выполнение заданий.
4. Ответы на вопросы.



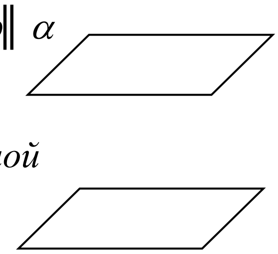
Краткая теория.

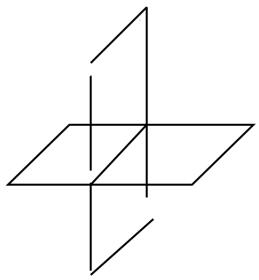
Взаимное расположение прямой и плоскости

1. *прямая лежит в плоскости:* $a \in \alpha$
2. *прямая пересекает плоскость:* $c \cap \alpha = A$
3. *прямая паралельна плоскости:* $b \parallel \alpha$

Взаимное расположение плоскостей

1. *плоскости параллельны*
2. *плоскости пересекаются по прямой*





Задания для самостоятельной работы

1 вариант

1. Пусть А и В – точки вне плоскости α. АС и ВД – перпендикуляры на эту плоскость.
АС = 3м, ВД = 2м и СД = 2,4м. найдите расстояние между точками А и В.

2. Отрезок длины 10см пересекает плоскость. Концы его удалены от плоскости на 5см и 3см. найдите длину проекции отрезка на плоскость.

2. Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно

3. Из точки вне плоскости проведена к этой плоскости наклонная длина которой равна 20см. Величина угла, образованного наклонной с плоскостью, равна 45°. Найдите расстояние от данной точки до плоскости.

2 вариант

1. Концы данного отрезка длины 125см отстоят от плоскости на 100см и 56см. Найдите длину проекции данного отрезка на плоскость.

8см. Отрезок длины 10см своими концами упирается в эти плоскости. Найдите длину проекции отрезка на каждую плоскость.

3. Из конца отрезка АВ длины 25см находящегося вне плоскости α, опущены на эту плоскость перпендикуляры АС=80см и ВД =60см. Найдите расстояние от середины этого отрезка до плоскости α.

Контрольные вопросы:

1. Какие случаи взаимного расположения прямых существуют в пространстве?
2. Какие случаи взаимного расположения прямой и плоскости существуют в пространстве?
3. Когда прямая перпендикулярна к плоскости?
4. Какие случаи взаимного расположения плоскостей существуют в пространстве?

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3. Атанасян Л.С.В.Ф.БутузовГеометрия учебник для 10-11 класса

Практическая работа № 30

Выполнение действий над векторами

Цель работы: закрепить умения выполнять действия над векторами.

Оснащение рабочего места:

2. Настоящая методическая разработка.
3. Учебная литература.
4. Тетрадь для практических работ**.**

Последовательность выполнения работы:

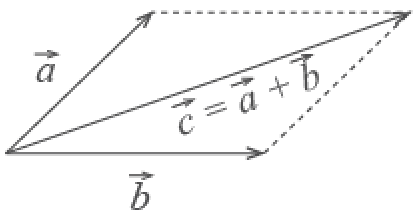
1. Получение индивидуального задания
2. Изучение теоретического материала по методической разработке.
3. Выполнение задания.
4. Ответы на вопросы.

Краткая теория

Действия над векторами

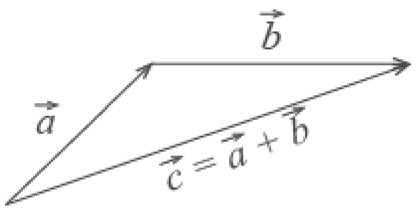
Для сложения векторов есть два способа:

1**. Правило параллелограмма**. Чтобы сложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, помещаем начала обоих в одну точку. Достраиваем до параллелограмма и из той же точки проводим диагональ параллелограмма. Это и будет сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

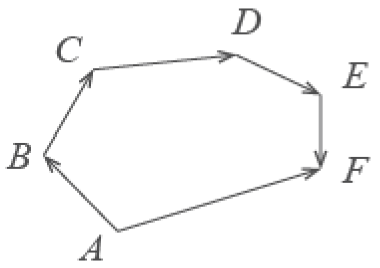


Помните басню про лебедя, рака и щуку? Они очень старались, но так и не сдвинули воз с места. Ведь векторная сумма сил, приложенных ими к возу, была равна нулю.

2. Второй способ сложения векторов — **правило треугольника**. Возьмем те же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. К концу первого вектора пристроим начало второго. Теперь соединим начало первого и конец второго. Это и есть сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



По тому же правилу можно сложить и несколько векторов. Пристраиваем их один за другим, а затем соединяем начало первого с концом последнего.



$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$$

Представьте, что вы идете из пункта A в пункт B, из B в C, из C в D, затем в E и в F. Конечный результат этих действий — перемещение из A в F.

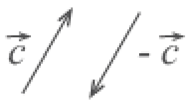
При сложении векторов $\vec{a}\,(x_a, y_a)$ и $\vec{b}\,(x_b, y_b)$ получаем:

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$\vec{c}\,(x_a + x_b\,,\, y_a + y_b)$

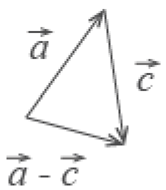
Вычитание векторов

Вектор $-\vec{c}$ направлен противоположно вектору $\vec{c}$. Длины векторов $\vec{c}$ и $-\vec{c}$ равны.



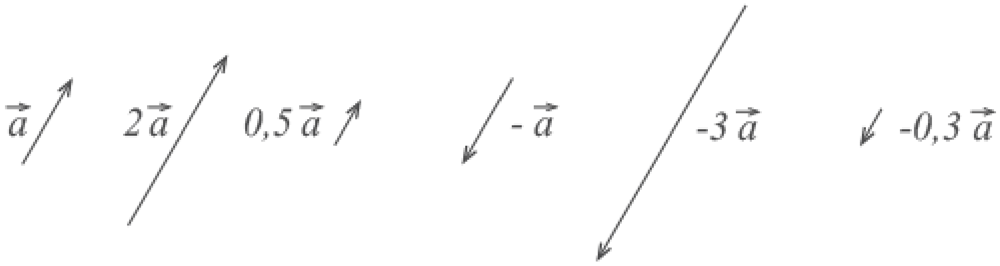
Теперь понятно, что такое вычитание векторов. Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ - это сумма вектора $\vec{a}$ и вектора $-\vec{c}$.

$\vec{a} - \vec{c} = \vec{a} + (-\vec{c})$

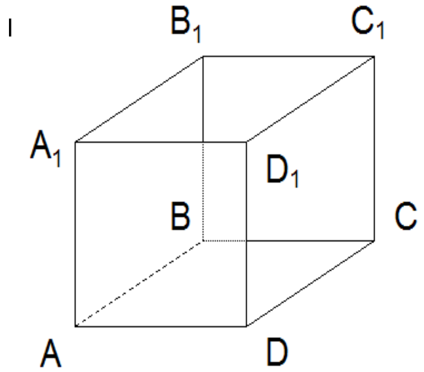


Умножение вектора на число

При умножении вектора $\vec{a}$ на число k получается вектор, длина которого в k раз отличается от длины $\vec{a}$. Он сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если k больше нуля, и направлен противоположно $\vec{a}$, если k меньше нуля.



Для сложений *некомпланарных векторов* применяют ***правило параллелепипеда***



Задание для самостоятельного выполнения:

1 вариант

1) Нарисуйте параллелепипед $АВСДА_1В_1С_1Д_1$, обозначьте вектор СД и ВС соответственно через векторы и найдите их сумму.
2) Изобразите на рисунке векторы (по выбору) и найдите их сумму, разность.
3) Изобразите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов

2 вариант

1) Нарисуйте параллелепипед $АВСДА_1В_1С_1Д_1$, обозначьте вектор СД и АД соответственно через векторы и найдите их сумму.
2) Изобразите на рисунке векторы (по выбору) и найдите их сумму, разность.
3) Изобразите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов

Контрольные вопросы:

1. Какие действия можно производить над векторами?
2. Как сложить два и несколько векторов?
3. Как найти разность векторов?
4. Как найти произведение вектора на число?

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2005
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 1991
3. Атанасян Л.С.В.Ф.БутузовГеометрия учебник для 10-11 класса

Практическая работа № 31
Задачи в координатах

Цель: Отработка умений решать простейшие задачи в координатах, находить углы между векторами.

Оснащение рабочего места:

5. Настоящая методическая разработка.
6. Учебная литература.
7. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

5. Получение индивидуального задания
6. Изучение теоретического материала по методической разработке.
7. Выполнение задания.
8. Ответы на вопросы.

Краткая теория:

Простейшие задачи в координатах.

1. Координаты середины отрезка.

Пусть даны точки $A(x_1;y_1;z_1), B(x_2 y_2;z_2)$ и точка $C(x;y;z)$, являющаяся серединой отрезка AB. Тогда

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2}{2};\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

2. Вычисление длины вектора по его координатам.

$$a\{x;y;z\}\ |a|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

3. Расстояние между двумя точками.

Расстояние между двумя точками $A(x_1;y_1;z_1)$ и$B(x_2;y_2;z_2)$ вычисляется по формуле:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ \ +(z_2-z_1)^2$$

Углы между векторами и прямыми.

Пусть даны два вектора

$a\{x_1;y_1;z_1\}$, $b\{x_2;y_2;z_2\}$.

Тогда косинус угла между данными векторами вычисляется по формуле:

$$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2}\sqrt{x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2}}$$

Задания для самостоятельной работы.

№1. Найти длину вектора АВ, если А(-1;0;2), В(1;-2;3)

№2.Определите вид треугольника АВС, если А(5;-5;-1), В(5;-3;-1), С(4;-3;0).

№3.Даны точки М(-4;7;0) и К(0;-1;2). Найдите расстояние от начала координат до середины отрезка МК.

№4. Даны точки А(0;1;2), В($\sqrt{2}$;1;2), С($\sqrt{2}$;2;1) и D(0;2;1).

Докажите, что ABCDквадрат.

№5. Вычислите угол между векторами а{2;-2;0} и b{3;0;-3}/

Контрольные вопросы:
1.Перечислите свойства координат вектора.
2. Чему равно скалярное произведение векторов

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2015
3. Атанасян Л.С.В.Ф.БутузовГеометрия учебник для 10-11 класса

Практическая работа № 32
Решение задач на нахождение элементов призм и построение сечений

Цель: повторить понятие многогранника, его поверхности, понятие правильного многогранника; определения призмы, параллелепипеда; виды призм; вычислять и изображать основные элементы прямых призм.

Оснащение рабочего места:

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получить индивидуальное задание;
2. Изучить теоретический материал по методической разработке;
3. Выполнить задания;
4. Ответить на вопросы.

Краткая теория.

Определение. ***Многогранной поверхностью*** *называется объединение конечного числа многоугольников, удовлетворяющих следующим условиям:*

1. для любых двух вершин этих многоугольников существует ломаная, составленная из их сторон, для которых взятые вершины служат концами;
2. произвольная точка поверхности либо является точкой только одного из данных многоугольников, либо принадлежит общей стороне двух и только двух многоугольников, либо является вершиной только одного многогранного угла, плоскими углами которого служат углы данных многоугольников.

Каждый многоугольник, входящий в многогранную поверхность, называется гранью, стороны этих многоугольников - ребрами, а вершины - вершинами многогранной поверхности.

Призма -это тело, ограниченное многогранной поверхностью, две грани которой суть n-угольники, а остальные n-параллелограммы.

Прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник, называется *правильной.*

Определение. Призма, основанием которой служит параллелограмм, называется ***параллелепипедом****.*

Параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны к плоскости основания, называется ***прямым.***

Прямой параллелепипед, основанием которого служит прямоугольник, называется ***прямоугольным.***

Теорема. Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Основанием прямой призмы служит ромб; длины диагоналей призмы равны 8 см и 5 см, а высота - 2 см. Найдите длину стороны основания.
2. Найдите площадь диагонального сечения куба, если длина ребра куба 12 см.
3. Найдите длины диагоналей прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям: 8 см, 9 см и 12 см.

4. В прямоугольном параллелепипеде длины сторон основания относятся как 7:24, а площадь диагонального сечения равна 50 дм2. Найдите площадь боковой поверхности
5. Определить полную поверхность прямой треугольной призмы, если ее высота равна 50 см, а стороны основания 40 см, 13 см и 37 см.

Контрольные вопросы:

1. Какой многогранник имеет наименьшее число граней? Сколько у него ребер, вершин и диагоналей?
2. Сколько диагоналей можно провести в четырехугольной призме?
3. Какая фигура называется параллелепипедом?
4. Чему равна площадь боковой поверхности призмы?

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3. Атанасян Л.С. В.Ф.БутузовГеометрия учебник для 10-11 класса

Практическая работа № 33
Решение задач на нахождение элементов пирамиды
и построение сечений

Цель: повторить понятие многогранника, его поверхности, понятие правильного многогранника; определение пирамиды, правильной пирамиды, уметь: вычислять и изображать основные элементы пирамид.

Оснащение рабочего места:

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получить индивидуальное задание;
2. Изучить теоретический материал по методической разработке;
3. Выполнить задания;
4. Ответить на вопросы.

Краткая теория.

Определение. Многогранной поверхностью называется объединение конечного числа многоугольников, удовлетворяющих следующим условиям:

1. для любых двух вершин этих многоугольников существует ломаная, составленная из их сторон, для которых взятые вершины служат концами;
2. произвольная точка поверхности либо является точкой только одного из данных многоугольников, либо принадлежит общей стороне двух и только двух многоугольников, либо является вершиной только одного многогранного угла, плоскими углами которого служат углы данных многоугольников.

Каждый многоугольник, входящий в многогранную поверхность, называется гранью, стороны этих многоугольников - ребрами, а вершины - вершинами многогранной поверхности.

***Пирамида** – это многогранник, у которого одна грань (основание пирамиды) – это произвольный многоугольник (ABCDE, рис.80), а остальные грани (боковые грани) – треугольники с общей вершиной S, называемой вершиной пирамиды.*

Задачи для самостоятельного решения.

1. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 7 см, а длина стороны основания 8см. Найти длину бокового ребра.
2. Высота пирамиды разделена на четыре равные части. Через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Площадь основания равна 400кв.ед. Найти площади полученных сечений.
3. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 7см, длины сторон оснований 10см и 2см. Найдите длину бокового ребра усеченной пирамиды.

Контрольные вопросы:

1. Какой многогранник имеет наименьшее число граней? Сколько у него ребер, вершин и диагоналей?

2. Сколько диагоналей можно провести в четырехугольной призме?
3. Какая фигура называется параллелепипедом?
4. Чему равна площадь боковой поверхности призмы?

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3. Атанасян Л.С. В.Ф.БутузовГеометрия учебник для 10-11 класса

Практическая работа №34
Решение задач на нахождение элементов цилиндра

Цель работы: рассмотреть задачи на вычисление элементов и поверхностей цилиндра, показать практическую направленность математики

Оснащение рабочего места:

1. Настоящая методическая разработка.
2. Учебная литература.
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания
2. Изучение теоретического материала по методической разработке.
3. Выполнение задания.
4. Ответ на вопросы.

Краткая теория.

Определение 1. Тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону, называется цилиндром.

$S_{бок}=2\pi RH, S_{полн}=2\pi R(R+H)$

Задания для самостоятельной работы.

1. Основанием цилиндра служит круг диаметра 8 см, высота цилиндра также 8 см. Чему равны боковая и полная поверхности цилиндра?
2. Дренажная труба представляет собой полый цилиндр, длина которого 60 см, а диаметры внутреннего и внешнего цилиндров равны соответственно 12 см и 13 см. Чему равна полная поверхность этой трубы?
3. Площадь осевого сечения цилиндра 104 см^2, площадь основания 196л см^2. Вычислите площадь сечения, параллельного оси цилиндра и отстоящего от нее на 5 см.
4. Вертикально установленный цилиндрический бак необходимо покрасить (без нижнего основания). Диаметр (внешний) бака равен 1,8 м, длина бака (внешняя) равна 3,5 м. Определите необходимое количество краски, если на 1 м^{2}поверхности ее расход равен 0,3 кг.

Контрольные вопросы:

1. Что является осевым сечением цилиндра?
2. Что называется сферой, шаром?
3. При вращении какой фигуры получается усеченный конус?

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3. Атанасян Л.С. В.Ф.БутузовГеометрия учебник для 10-11 класса

Практическая работа №35
Решение задач на нахождение элементов конуса

Цель работы: рассмотреть задачи на вычисление элементов и поверхностей тел вращения, показать практическую направленность математики

Оснащение рабочего места:

1. Настоящая методическая разработка.
2. Учебная литература.
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания
2. Изучение теоретического материала по методической разработке.
3. Выполнение задания.
4. Ответ на вопросы.

Краткая теория.

Определение 1. Фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет, называется конусом.

$S_{бок}=\pi Rl$, $S_{полн}=\pi R(R+l)$

Определение 2. Часть конуса, заключенная между его основанием и сечением, плоскость которого перпендикулярна высоте конуса, называется усеченным конусом.

$S_{бок}=\pi(R+r)l$

Определение 4.Тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии не большем данного, от данной точки называется шаром.

Задания для самостоятельной работы.

1. Коническая крыша силосной башни имеет диаметр 6 м и высоту 2 м. Сколько листов кровельного железа, размером 0,7 х 1,4 м, потребуется для этой крыши, если на стыковку швов расходуется 10 % железа от общей площади крыши, а отходы от кройки железа составляют 15 %?
2. Радиусы оснований усеченного конуса равны 5 см и 11 см, длина образующей 10 см. Найдите полную поверхность и площадь осевого сечения.
3. Высота усеченного конуса 6 см, радиусы оснований 10 см и 2 см. Найдите $S_{бок}$ и $S_{полн}$.
4. Какие размеры имеет развертка боковой поверхности ведра, если радиусы его оснований 14 см и 10 см, а высота 24 см? Сколько материала нужно затратить на изготовление этого ведра, если на швы идет 5 % жести?
5. Площади оснований усеченного конуса 4 дм^2 и 16 дм^2. Через середину высоты проведена плоскость, параллельная основаниям. Найдите площадь сечения.
6. Площади оснований усеченного конуса Мип. Найдите площадь среднего сечения, параллельного основаниям.

Контрольные вопросы:

2. Что является осевым сечением цилиндра?
3. Что называется сферой, шаром?
4. При вращении какой фигуры получается усеченный конус?

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3. Атанасян Л.С. В.Ф.Бутузов Геометрия учебник для 10-11 класса

Практическая работа №36
Решение задач на нахождение элементов шара и сферы

Цель работы: рассмотреть задачи на вычисление элементов и поверхностей тел вращения, показать практическую направленность математики

Оснащение рабочего места:

1. Настоящая методическая разработка.
2. Учебная литература.
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания
2. Изучение теоретического материала по методической разработке.
3. Выполнение задания.
4. Ответ на вопросы.

Краткая теория.

Определение 1. Тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону, называется цилиндром.

$S_{бок}=2\pi RH$, $S_{полн}=2\pi R(R+H)$

Определение 2. Фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет, называется конусом.

$S_{бок}=\pi Rl$, $S_{полн}=\pi R(R+l)$

Определение 3. Часть конуса, заключенная между его основанием и сечением, плоскость которого перпендикулярна высоте конуса, называется усеченным конусом.

$S_{бок}=\pi(R+r)l$

Определение 4.Тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии не большем данного, от данной точки называется шаром.

Задания для самостоятельной работы.

1. Площади оснований усеченного конуса 4 дм^2 и 16 дм^2. Через середину высоты проведена плоскость, параллельная основаниям. Найдите площадь сечения.
2. Площади оснований усеченного конуса Мит. Найдите площадь среднего сечения, параллельного основаниям.
3. Шар, радиус которого 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Найдите площадь сечения.

Контрольные вопросы:

1. Что является осевым сечением цилиндра?
2. Чтоназывается сферой, шаром?
3. ***При вращении какой фигуры получается усеченный конус?***

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3. Атанасян Л.С. В.Ф.БутузовГеометрия учебник для 10-11 класса

Практическая работа №37
Решение задач на нахождение объемов геометрических тел

Цель работы: рассмотреть задачи на вычисление объемов геометрических тел, показать практическую направленность математики

Оснащение рабочего места:

1. Настоящая методическая разработка.
2. Учебная литература.
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания
2. Изучение теоретического материала по методической разработке.
3. Выполнение задания.
4. Ответ на вопросы.

Краткая теория

2. *Призма -это тело, ограниченное многогранной поверхностью, две грани которой суть n-угольники, а остальные n-параллелограммы.*
3. *Призма, основанием которой служит параллелограмм, называется параллелепипедом*
4. *Пирамида – это многогранник, у которого одна грань (основание пирамиды) – это произвольный многоугольник, а остальные грани (боковые грани) – треугольники с общей вершиной S, называемой вершиной пирамиды*
5. *Объем прямого параллелепипеда* $V = S_{\text{осн}}\text{H}$
6. *Объем прямоугольного параллелепипеда* $V = abc$
7. *Пирамида– это многогранник, у которого одна грань (основание пирамиды) – это произвольный многоугольник, а остальные грани (боковые грани) – треугольники с общей вершиной S, называемой вершиной пирамиды.*
8. *Объем пирамиды* $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}\text{H}$
9. *Объем усеченной пирамиды* $V = \frac{1}{3}H(S_1 + \sqrt{\text{S}_1\text{S}_2} + S_2)$
10. *Тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону, называется цилиндром.* $V = S_{\text{осн}}\text{H} = \pi r^2 H$
11. *Фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет, называется конусом.* $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}\text{H} = \frac{1}{3}\pi r^2 H$
12. *Тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии не большем данного, от данной точки называется шаром.* $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Задания для самостоятельной работы

1. Три латунных куба с ребрами 3см, 4см и 5см переплавлены в один куб. Найти ребро этого куба.
2. Требуется установить резервуар для воды емкостью 10м3 на площадке размером 2,5 на 1,75м служащей для него дном. Найти высоту резервуара.
3. Деревянная плита в форме правильного восьмиугольника со стороной 3,2см и толщиной 0,7 см имеет массу 17,3г. Найти плотность дерева.
4. В прямой треугольной призме стороны оснований равны4см, 5см и 7см. Боковое ребро равно большей высоте основания. Найти объем пирамиды.
5. Площадь основания прямой треугольной равна 4см2, а площади боковых граней 9см2, 10см2, 17см2. Найти объем призмы.
6. Основание пирамиды прямоугольник со сторонами 9м и 12м, все боковые ребра равны 12,5м. Найти объем пирамиды.
7. 25м медной проволоки имеют массу 100,7г. Найдите диаметр проволоки, если плотность меди 8,924г/см3
8. Жидкостьналитая в конический сосуд высотой 0,18м и диаметром основания 0,24 м переливается в цилиндрический сосуд, диаметр основания которого 0,1м. Как высоко будет стоять уровень жидкости в сосуде?
9. Усеченный конус, у которого радиусы оснований 4см и 22см, и равновеликий цилиндр имеют одну и ту же высоту. Найти радиус основания этого цилиндра.
10. Требуется переплавить в один шар два чугунных шара с диаметрами 25см и 35см. Найти диаметр нового шара.

Контрольные вопросы.

1. Что такое шаровой сегмент?
2. По какой формуле вычисляется площадь боковой поверхности сферы.
3. Какие фигуры называются равновеликими?

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 1991